Gymnasiearbeten inom matematik

Projektideér in framtagna av institutionen för matematik och matematisk statistik vid Umeå universitet. I samarbete med Unga Forkskare.

Samlad av Manya Sundström, institution för naturvetenskaparnas och matematikens didaktik, Umeå universitet. VT 2025.

MATEMATISKA KNUTAR

Projektidé framtagen av Manya Sundström i samarbete med institution för matematik och matematiska statistik vid Umeå universitet

INTRODUKTION

Knutteorin introducerades på 1800-talet av matematikern Gauss. I mitten av 1800-talet lyftes de fram som ett sätt at representera molekyler, i ett tidigt försök att konstruera ett periodiskt system baserad på idén att sättet molekyler är formade på är systematiskt. Denna idé misslyckades, men knutteori återupptogs på 1900-talet då matematiker hittade sätt att klassificera knutar med hjälp av abstrakt algebra.

PROJEKTINSPIRATION FÖR GYMNASIEARBETET

En av de centrala utmaningarna inom knutteori är hur man kan avgöra om två knutar är lika. Ett verktyg för detta ges av så kallade Reidemeisterförflyttningar, som beskriver hur en knut kan deformeras till en annan. Ett ytterliggare steg är att titta på olika metoder, till exempel Alexanderpolynomet, som kan användas för att visa att två knutar är olika. Om du är intresserad av ett mer tillämpat projekt så kan du undersöka hur man bäst har sina hörlurar i fickan utan att sladden trasslar sig, ett problem som är relaterat till hur DNA tvinnar sig i celler.

Skaffa en bit rep och börja experimentera!

KÄLLOR/MATERIAL

https://www.youtube.com/watch?v=8DBhTXM_Br4&t=1203s

KOPPLING TILL VERKLIGHETEN

Knutteori är viktigt för att förstå bettende hos DNA och andra polymerer. Inom fysik används det i statistisk mekanik och kvantfältsteori och kan komma att spela stor roll i utveckling av kvantdatorer.

UNGA FORSKARE

FINANSIELL MATEMATIK

Projektidé framtagen av Christian Ewald från institution för matematik och matematiska statistik vid Umeå universitet

INTRODUKTION

Kan man förutsäga framtida värden av aktier och andra finansiella instrument? Finansiell matematik refererar till matematiska modeller som används för att beskriva ekonomiska trender, på till exempel aktiemarknaden. Dessa modeller är i allmänhet osynliga för allmänheten men spelar en stor roll i vår vardag, till exempel i hur banker bestämmer vilka som får ta lån och hur pengar ska investeras.

PROJEKTINSPIRATION FÖR GYMNASIEARBETET

I det här projektet kommer du simulera aktiemarknaden och undersöka vilka modeller som bäst förutsäger vad som faktiskt sker i världen. Målet är att se vilka typer av val som bestämmer en modell och hur de fungerar. Ditt projekt kan innehålla två-tre modeller som du använt och förklarat med de avägningar du gjort i dem. Du kan också behandla farorna med att använda matematiska modeller på ett för strikt, eller felaktigt, sätt.

KÄLLOR/MATERIAL

https://en.wikipedia.org/wiki/Mathematical_finance
Black-Scholes Equation, Veritasium
Brownian-Motion and finance

KOPPLING TILL VERKLIGHETEN

Finansiell matematik används av banker, försäkringsbolag och beslutsfattare dagligen, och formar vårt samhäller utan att vi ser det.

UNGA FORSKARE

PACKNINGSPROBLEMET

Projektidé framtagen av Per-Håkan Lundow från institutionen för matematik och matematisk statistik vid Umeå universitet

INTRODUKTION

Projektet handlar om varianter av en klassiska problem: hur kan man packar eller övertäcka en yta med diskar av olika storlekar. Problemet, så-kallades Keplers problem, kom från studie av atomens struktur (ca. 1600) men idag har många tillämpningar inom kemi, fysik, och industri. Tänk på packningen från din senast beställning from Amazon--varför valde de just dessa form?

PROJEKTINSPIRATION FÖR GYMNASIEARBETET

Projektet kan lätt anpassas efter ditt intresse, tex som ett programmerings-projekt (Matlab, Python) eller också som ett mer teoretiskt projekt. Problemet kan lätt varieras och du kan själv välja ett område att packa med diskar (se packomania, nedan). Däremot blir problemet snabbt oerhört svårt om vi packar med något annat än diskar och erbjuder därför lätt stora utmaningar till den ambitiösa studenten, tex packa *n* diskar och en kvadrat i en disk. Grundproblemet är löst exakt endast i vissa specialfall men det finns en lång lista av hittills bästa kända lösningar som möjligen kan förbättras. En variant av projektet kan även vara att implementera specialalgoritmer och på så vis försöka hitta bättre lösningar. Utforska länkarna nedan och referenser däri (särskilt Ball-Coxeter och Gardner).

KÄLLOR/MATERIAL

https://mathworld.wolfram.com/DiskCoveringProblem.html
https://mathworld.wolfram.com/CirclePacking.html
http://www.packomania.com

KOPPLING TILL VERKLIGHETEN

Packningsproblemet har många tillämpningar, från transport till fysiologi till arkitektur till kristallstruktur. See here and here.

KARDINALTAL OCH OLIKA STORA OÄNDLIGHETER

Projektidé framtagen av Axel Flinth från institution för matematik och matematisk statistik vid Umeå universitet

INTRODUKTION

Hur vet man att två oändliga mängder är lika stora? Det finns ett berömt tankeexperiment (tillskrivet matematikern David Hilbert) som illustrerar svårigheterna med den frågan. Hilbert föreställde sig ett hotell med oändligt många hotellrum. Hotellet är fullbokat, men när en ny gäst kommer kan receptionisten utan problem fixa ett ledigt rum genom att be alla inkvarterade gäster flytta till rummet intill. Strax därpå anlände dock en buss med oändligt många nya gäster på. Kan receptionisten fixa rum till alla även i en sådan situation?

PROJEKTINSPIRATION FÖR GYMNASIEARBETET

Mycket av det här projektet kommer att bestå i att förstå definitionerna, koncepten, och att arbeta med att skriva ner eleganta bevis med egna ord. Ett sätt att lägga upp projektet är att först sätta sig in i tankeexperimentet Hilberts hotell, och därefter skriva en text där man förklarar tankeexperimentet på ett mer formellt matematiskt sätt. Man kan också arbeta med konkreta frågeställningar. Några exempel på sådana är:

- Är de jämna talen en *uppräknelig* (förklaras nedan) mängd?
- Är de rationella talen, alltså alla tal som man kan skriva som bråk, en *uppräknelig* mängd?
- Vilka exempel på *ouppräkneliga* mängder finns det?
- Finns det ett största kardinaltal, eller finns det oändligt många?

KÄLLOR/MATERIAL

Wikipedia: “Kardinaltal” https://sv.wikipedia.org/wiki/Kardinaltal
Wikipedia: “Hilberts hotel” https://sv.wikipedia.org/wiki/Hilberts_hotell
TED-Eds video “The infinite hotelparadox”

HYPERBOLISKA YTOR

Projektidé framtagen av Jakob Hultgren från institution för matematik och matematiska statistik vid Umeå universitet

INTRODUKTION

Den grundläggande geometrin som lärs ut i skolan är Euklidisk och de flesta problemen formulerades i det Euklidiska planet. I det Euklidiska planet håller parallellaxiomet: givet en linje L och en punkt P som inte ligger på L så finns det exakt en linje M genom P som är parallell med L. Parallellaxiomet har en fascinerande historia. Under hundratals år trodde man att det gick att bevisa från andra geometriska axiom. När matematikerna till slut testade vad som hände om axiomet ändrades så blev resultatet nya intressanta geometrier: i projektiv geometri finns inga parallella linjer alls, och i hyperbolisk geometri finns oändligt många linjer M genom punkten P som är parallella till L.

PROJEKTINSPIRATION FÖR GYMNASIEARBETET

I det här projektet utformar du en fysisk modell av det hyperboliska planet och svarar på några frågor om det. Idén att utforska matematiska idéer med fysiska modeller är inte ny. En blind matematiker löste en gång ett problem som handlade om att vända ut och in på en sfär genom att modellera den i lera. Det här projektet görs i garn med virkningsteknik, om du inte har någon annan idé du vill utforska. När du konstruerat en modell av det hyperboliska planet kan du utforska praktiska mätproblem i det hyperboliska planet som hur man mäter avstånd mellan två punkter, hur man mäter vinkelsumman i en triangel, eller hur man hittar kortaste vägen mellan två punkter (geodeter).

KÄLLOR/MATERIAL

https://www.youtube.com/watch?v=w1TBZhd-sN0
https://paula.rizzuto.id.au/hyperbolic-plane-crochet-model/
https://pi.math.cornell.edu/~dtaimina/crochet/hplane.htm

TILLÄMPLINGAR

En överblick på det hyperboliska rummet och några tillämpningar kan hittas här.

UNGA FORSKARE

SPEL FRÅN RAMSEYTEORI

Projektidé framtagen av Victor Falgas-Ravry från institution för matematik och matematiska statistik vid Umeå universitet

INTRODUKTION

Vill du förstå hur stora nätverk fungerar, till exempel kommunikationsmönster, stora sociala nätverk och smittspridning i samhället? Ramseyteori är ett verktyg för att relatera strukturer till delstrukturer. Ett typexempel av detta ges av följande: På varje fest som har åtminstone sex deltagare finns åtminstone tre personer som inte känner varandra eller tre personer som känner varandra. Problemet kan representeras av en samling punkter, en för varje deltagare på festen, sammanbundna med antingen blå linjer eller röda linjer beroende på om deltagarna känner varandra, en så kallad två-färgad graf. Påståendet ovan säger då att varje tvåfärgad komplett graf med åtminstone sex punkter innehåller en enfärgad triangel.

PROJEKTINSPIRATION FÖR GYMNASIEARBETET

Projektet går ut på att skapa en app för mobiltelefoner som låter användaren leka med koncept från Ramseyteori. Appen ska kunna användas av personer utan bakgrundskunskap i matematik. Uppgiften ligger i att läsa om olika spel från Ramseyteori, välja några av olika svårighetsgrad och skapa en användarvänlig app. Din projektrapport kan innehålla en historik över Ramseyteori, tillämpningar och en teknisk beskrivning över hur du byggt din app. Länkarna nedan innehåller användbart material och några spel du kan utgå från.

KÄLLOR/MATERIAL

https://en.wikipedia.org/wiki/Ramsey_theory
https://en.wikipedia.org/wiki/Pigeonhole_principle
https://math.mit.edu/~fox/paper-antiRamsey.pdf
Games: Friends and Strangers, Coloring numbers, Cops and Robbers

KOPPLING TILL VERKLIGHETEN

Ramseyteori används inom många akademiska fält, såsom talteori and teoretisk datavetenskap. Det används också i samhället inom kommunikation, beslutstagande och informationssökning.

STELA STRUKTURER

Projektidé framtagen av Klara Stokes från institution för matematik och matematiska statistik vid Umeå universitet

INTRODUKTION

Hur får man en konstruktion stabil med så lite material som möjligt? I det här projektet undersöks matematiken bakom frågan om vad som gör en geometrisk artikulerad struktur stel. Exempel på artikulerade strukturer är broar och stagverk, men också strukturer som görs av plattor som hänger ihop I gångjärn. Dessa strukturer används sedan som matematiska modeller i tillämpningsområden som robotik, stelhetsanalys av proteiner och design av innovativa material. Forskningsområdet har en lång historia och är ett aktivt forskningsområde fortfarande idag.

PROJEKTINSPIRATION FÖR GYMNASIEARBETET

För att modellera en artikulerad struktur kan man använda en (kombinatorisk) graf, eller ett nätverk av leder (noder) sammanbundna i par med stag av en given längd. Tänk exempelvis på en sådan struktur med 4 noder sammanbundna som en fyrkant. Fyrkanten kan pressas samman utan att längden på sidorna ändras, alltså är den inte stel. En triangel däremot är stel: det går inte att röra på en triangel utan att ändra längden på dess sidor (om man bortser från de så kallade stela rörelserna i planet. I två dimensioner går det att avgöra stelhet med kombinatorik genom att räkna antal noder och antal stag, men metoden fungerar inte i tre dimensioner. I det här projektet får du konstruera exempel av grafer för vilken det kombinatoriska räknevillkoret misslyckas för i 3D och undersöka vad du tror att de strukturerna har gemensamt.

KÄLLOR/MATERIAL

http://www.eecs.northwestern.edu/~peters/references/RigidityIntro.pdf

https://youtu.be/k2jKCJ8fhj0?si=w9XJ3k-Db4xGR9tl
https://www.youtube.com/watch?v=YBItQYe2gus

Gymnasiearbeten Projects
English summaries

Mathematical Knots
Introduction
Knot theory began in the 1800s as a suggestion by Gauss. In mid 1800s knots were suggested as a way to represent molecules, an early attempt to construct a periodic table, based on the idea that the way molecules are shaped would be systematic. This idea eventually failed, and the study of knots was revived in the 20th century as mathematicians found ways to classify knots using the language of abstract algebra.
Project plan
One of the central issues in knot theory is how to show if two knots are the same. You can start exploring the mathematics of knots by learning about Reidemeister moves, which describe how to deform one knot into another. A next step would be to look at different methods, such as the Alexander polynomial, for determining if two knots are actually the same. If you are interested in a more applied project, you can study the best way to store your headphones in your pocket so that they don't tangle (with connections to studies of how DNA twists in cells.)
But the first step should be to get a piece of rope, and start exploring on your own!

Financial mathematics
Introduction
Financial mathematics refers to models which are used to describe economic trends, for instance in the stock market. These models are largely invisible to the average citizen but play a big role in our day-to-day lives, for instance how banks determine who should get loans, or how your money should best be invested.

Project plan
In this project you will simulate the stock market and look at which kinds of models best predict what actually happens in the world. The goal is to see the kinds of choices that go into a model, and to try to understand how they work. Your final project should have 2-3 models used and explained with the tradeoffs that are manifest in them. You could also address the inherent dangers of using mathematical models too strictly, or incorrectly.

The packing problem
Introduction
What is the largest number of circles of the same or different radii that you can pack into a square? What is the fewest number of circles needed to cover a square? These simple questions are deceptively difficult and give rise to a whole area of mathematics that is alive and active today. This project is about understanding the problems and exploring mathematical models to solve them.

Project plan
Start with the easier question, of how to optimally pack circles into a square (see Wikipedia below). This problem is already solved, and you can explore by keeping a fixed radius or allowing the circles to be of any size. A systematic exploration of this question is a good start to the project.
To answer the covering question, which noone has solved yet for large numbers of circles, you could use a simulation to study different cases. The point here is not to actually program anything (that would be another project all alone), but to use the program to help you find patterns, and possibly even discover something new!

Cardinal numbers and different sizes of infinity

Introduction
How does one determine if two infinite sets are equally large? There is a famous joke attributed to David Hilbert about a hotel that had infinitely many rooms. One night at the hotel, a guest arrived. Since the hotel was fully booked, the guest didn't have much hope, but still asked for a room. "No problem", said the receptionist, "just give me a moment". They then asked each guest to change room to the one with the next highest number. That left room number one free for the new guest.

Then however, a bus with infinitely many new guests arrived. Can an ingenious receptionist also handle this situation?

Project Plan
This project is about understanding the nature of infinity, and more specifically so-called cardinal numbers. It centers around the basic definitions and concepts, and working to write elegant proofs in your own words. One way to think about the project is to start with reading up on the Hilbert Hotel thought experiment and write a text that describes it in a formal mathematical way.
Here are some concrete questions to start with:

- Are the even numbers countable?
- Are rational numbers, that is the numbers one can write as fractions, countable?
- What are examples of uncountable sets?
- Is there a largest cardinal number, or are there infinitely many cardinal numbers?

Hyperbolic Surfaces

Introduction
The geometry you learned in high school is Euclidean. Most of the problems were done in the plane, a flat surface for which the parallel axiom holds. Namely, given a line and a point not on the line there is exactly one line through that point which is parallel to the original line. This axiom has a fascinating history, for hundreds of years it was accepted as a rule in geometry that could be proved. After countless attempts, mathematicians tested what would happen if the axiom was altered in some way. Like instead of having ONE parallel line through the point, if there could be NO parallel lines, or if there could be MORE THAN ONE parallel lines? infinitely many?

Project Plan

This exploration will take place by making a physical hyperbolic plane and answering some questions about it. The idea of exploring a mathematical object physically is nothing new. A blind mathematician once solved a problem about turning a sphere inside out by modeling it in clay. Our study will be done with yarn, unless you think of a better medium.

Ramsey Theory Game App

Introduction

Suppose you want to throw a party and make sure at least 3 people know each other, or they all don't, how many people do you have to invite? This is a typical question of Ramsey Theory, a branch of mathematics which relates structures to substructures. The problem given here can be represented by a bunch of vertices connected either by a blue line (for knowing each other) or red (for not). The question becomes how many vertices you need for a two-color complete graph to assure you will get a monochromatic triangle.

Project plan

These kinds of questions are fun to play with, and quickly become deep, leading to questions that are areas of active mathematical research. This project is about creating an app to let people play with some of these questions. The app should be usable by people without much mathematical background but also serve as an introduction to the theory behind the game. Your task would be to read about different Ramsey theory games, to choose a few of different difficulty levels, and to program an app with a user-friendly interface that could actually be used. Your project report could include a history of Ramsey Theory, applications in the real world, any proofs you might want to include, and a technical description of how you made your app. The links below provide some reading and a few games to get you started.

Rigidity

Introduction

How do you make an object rigid with as little material as possible? In this project one will investigate the mathematics behind the question of how to make an articulated object rigid. Examples of articulated structures include bridges and scaffolding, but also structures made of plates that hang together with iron. These structures are used in mathematical modellings for instance in robotics, structural analysis of proteins, and design of innovative materials. The research area has a long history and is active today.

Project Plan

To model an articulated structure one can use a combinatoric graph or a netwok of nodes connected by a brace of a given length. Consider a structure with four nodes, connected as a square. The square can be pressed down without the side lengths changing, so it is not rigid. A triangle, however, is rigid, the sides cannot be pressed down and retain their length. In two dimensions one can determine which graphs are rigid or not by counting the number of nodes and braces, but this doesn't work in three dimensions.
In this project you will construct examples of graphs for which the counting methods fail in 3-D and try to determine what those structures have in common.

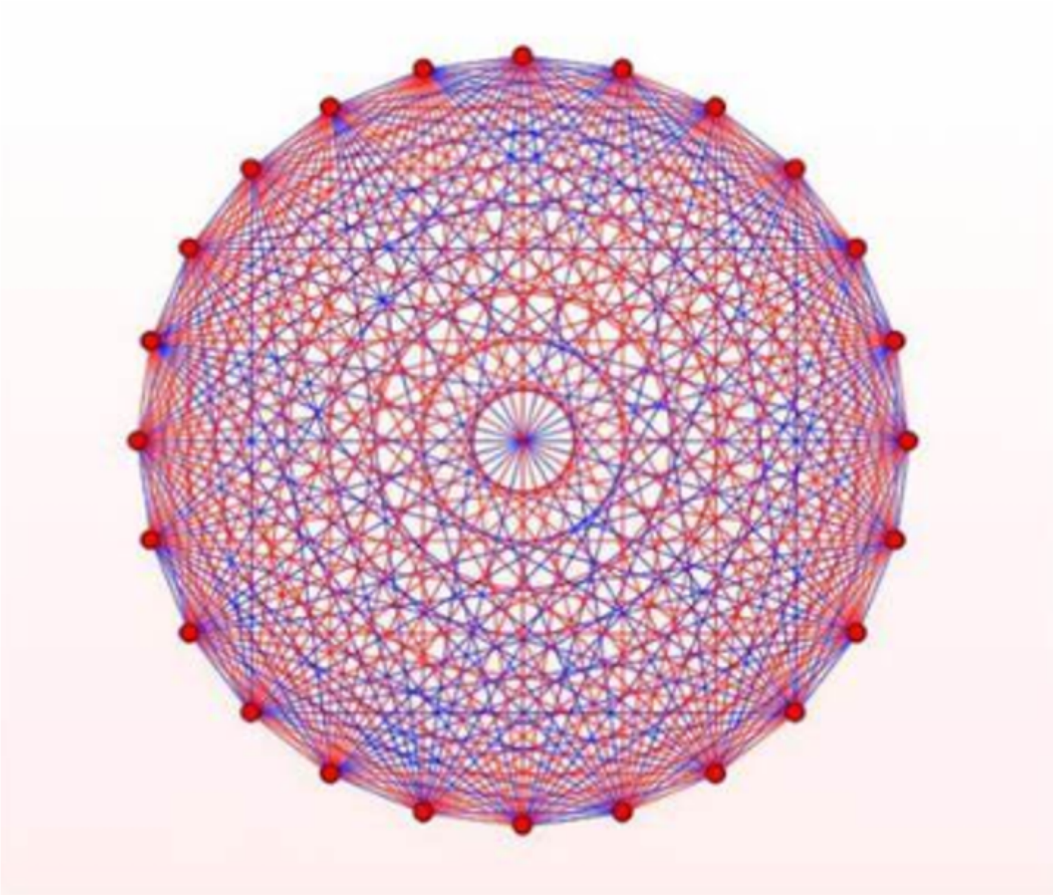

Photo: Sci.News