Problemlösning och tävlingsmatematik

Problem att börja med

1. Uppgift 2.22
2. Uppgift 2.23
3. Uppgift 2.24
4. Uppgift 2.25
5. En hög med 2024 mynt placeras på bordet. Spelarna A och B spelar, där A börjar. Varje drag innebär att välja 1, 2, 3 eller 4 mynt från högen. Den spelare som tar det sista myntet vinner (dvs. lämnar en tom hög efter sitt drag). Vilken av spelarna har en vinnande strategi (här antar vi att båda spelarna spelar optimalt och försöker vinna spelet)?

   Vad händer om 2024 ersätts med ett godtyckligt heltal n? Kan du klassificera de värden på n för vilka A har en vinnande strategi?

6. $2n$ punkter ritas på planet så att inga tre ligger på samma linje. n sträckor ritas så att varje punkt är ändpunkt för precis en sådan sträcka.

   Vid varje steg, om möjligt, väljer Albert två skärande sträckor, säg AB och CD, raderar dem och ersätter dem med sträckor AC och BD. Processen slutar om sträckor inte längre skär varandra.

   Bevisa att processen måste avslutas efter ett ändligt antal sådana drag, oavsett vilken sekvens av drag som tillämpas.

Mer utmanande problem

1. Vi börjar med tre tal: $\{3, 4, 12\}$. I ett steg väljs två av talen, säg a och b, och ersätts med talen $\frac{3a}{5} - \frac{4b}{5}$ samt $\frac{4a}{5} + \frac{3b}{5}$. Kan ett antal sådana steg leda till:

   (i) talen $\{4, 6, 12\}$?

   (ii) några tal $\{x, y, z\}$ där $|x - 4|$, $|y - 6|$, $|z - 12| < \frac{1}{\sqrt{3}}$?

2. Uppgift 2.26
3. Uppgift 2.27
4. n positiva heltal skrivs i en rad på tavlan. Iterativt väljer Alice två intilliggande tal x och y sådana att $x > y$ och x är till vänster om y, och ersätter paret (x, y) med $(x - 1, x)$. Bevisa att hon endast kan utföra ett ändligt antal sådana iterationer.
5. Ett heltal $n \geq 2$ är uppskrivet på ett papper. Två spelare gör vartannat drag i ett spel där man i varje drag väljer en primtalsdelare till det uppskrivna talet och subtraherar den från talet självt. Resultatet ersätter det uppskrivna talet. Spelet avslutas när talet man får efter subtraktionen är 0. Den spelare som gör det sista draget förlorar. För vilka värden på n har den spelare som börjar en vinnande strategi? (Skolornas matematiktävling finaluppgift, 2024)

Svåra problem (på engelska)

1. n positive integers are written in a row on the board. Iteratively, Alice chooses two adjacent numbers x and y such that $x > y$ and x is to the left of y, and replaces the pair (x, y) by either $(y + 1, x)$ or $(x - 1, x)$. Prove that she can perform only finitely many such iterations.

2. Consider 2024 cards, each having one gold side and one black side, lying in parallel on a long table. Initially all cards show their gold sides. Two players, standing by the same long side of the table, play a game with alternating moves. Each move consists of choosing a block of 50 consecutive cards, the leftmost of which is showing gold, and turning them all over, so those which showed gold now show black and vice versa. The last player who can make a legal move wins.

   (a) Prove that the game must always end after a finite number of moves.

   (b) Determine which one of the players has a winning strategy.

3. There are $n+1$ buckets on the table, labeled with $0, \ldots, n$. At the start, there are n coins on bucket 0. Axel is moving coins according to the following rules. At each stage, he chooses a bucket i containing at least 2 coins, removes these two coins from the bucket and places one coin to bucket $i - 1$ and the other to bucket $i + 1$. However, if Axel chooses bucket 0, then he places one of the coins in bucket 1 and leaves the other one in bucket 0.

   Axel wins if he can come up with a finite sequence of such moves so that at least one of the coins ends up in the bucket n. Prove that Axel cannot ever succeed with this task.