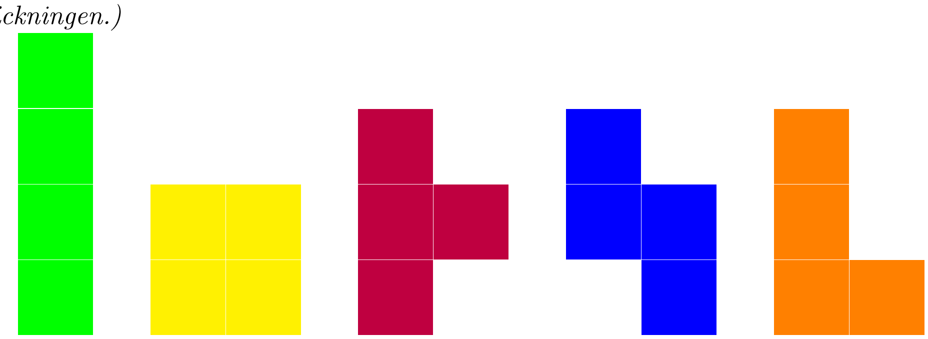
Problemlösning och tävlingsmatematik

2 Oktober 2024

1 Problem att börja med

Problem 1.1. *Går det att täcka en 4×5 rektangel med följande fem tetrominos? (Rotationer är tillåtna, men varje tetromino får användas endast en gång i täckningen.)*



Problem 1.2. *Kan ett 10×10-rutnät övertäckas med två 2×2-brickor och 23 brickor bestående av fyra rutor vardera i form av bokstaven L, som i figuren? Den andra brickan kan, vid behov, roteras och/eller vändas.*

Problem 1.3 (Uppgift 2.12)**.** *Ett 8×8-rutnät övertäcks med 32 dominobrickor (varje ruta på en domimobricka är lika stor som en ruta i nätet). Visa att antalet dominobrickor som ligger horisontellt på rutnåtet är ett jämnt tal.*

Problem 1.4 (Uppgift 2.13)**.** *Kan ett 10×10-rutnät övertäcks med*

(i) 25 'T-brickor' (den röda bricka i figuren ovan)?

(ii) 25 1×4 brickor (den gröna bricka i figuren ovan)?

Problem 1.5 (Uppgift 2.14)**.** *Kan ett 10×14-rutnät övertäckas med 1×4 brickor?*

Problem 1.6 (Uppgift 2.15)**.** *Lasses rektangulära uteplats är täckt med betongplattor. En del av plattorna har formen av 2×2-brickor, andra har formen av 1×4 brickor. En av plattorna har gått sönder, men som en eventuell ersättning har Lasse bara en enda platta av den andra sorten. Kan Lasse ersätta den trasiga plattan med den han har genom att eventuellt rearrangera de plattor som finns på uteplatsen?*

Problem 1.7 (Uppgift 2.16)**.**

(i) *På skolgården ritade barnen ett rutnät med sex rader och sex kolonner. I var och en av de* 36 *rutorna ställde sig ett barn. På lärarens signal hoppade varje barn till en angränsande ruta (två rutor är angränsande om de har en gemensam sida). Kan denna förflyttning organiseras så att det på slutet återigen finns ett barn i varje ruta?*

(ii) *Ett av barnen fick ont i magen och avbröt leken, varför de övriga ritade ett nytt rutnät med sju rader och fem kolonner. Hur kan barnen organisera förflyttningen om de vill fortsätta att leka samma lek?*

Problem 1.8 (Uppgift 2.19)**.** *Ett rektangulärt* $m \times n$*-rutnät är övertäckt med* 6×1*-brickor. Visa att talet* 6 *måste vara en delare till minst ett av talen* n *och* m*.*

Problem 1.9 (Uppgift 2.21)**.** 21 *trominobrickor (tre kvadrater limmade ihop i en rad) kan tillsammans täcka* 63 *rutor på ett* 8×8*-rutnät. En av rutorna blir alltså icke-övertäckt. Vilka är de möjliga positionerna där den tomma rutan kan finnas?*

2 Svårare utmaningar att prova hemma

Problem 2.1. *På varje ruta i ett* 9×9 *rutnät sitter en sköldpadda. När en klocka ringer så flyttar varje sköldpadda till en ruta som ligger diagonalt mittemot deras nuvarande ruta. Vad ä minsta antalet tomma (dvs sköldpaddafria) rutor efter klockan har ringt?*

Problem 2.2. *Alice och Bengt spelar följande spel på ett schackbräde. Med hennes första drag får Alice placera en springare på en valfri ruta. Efter det så turas om Bengt och Alice att flytta springaren med ett tillåtet schackdrag med restriktionen att springaren måste landa på en ruta den har inte besökt än. Den som först finner sig i en position där dom kan inte flytta springaren förlorar spelet. Visa att Bengt har en vinnande strategi.*

Problem 2.3. *Visa att ett* $m \times n$ *rutnät kan täckas med* $1 \times a$ *brickor om och endast om talet* a *delar minst ett av talen* m *eller* n*.*

Problem 2.4. *Ett* 7×7 *rutnät är täckt med* 16 *styck* 3×1 *brickor och en* 1×1 *bricka. Bestäm var i rutnätet* 1×1 *brickan kan finnas. (Obs: Detta problem har två delar. Först måste du bevisa att man kan placera* 1×1 *brickan på vissa rutor. Sedan måste du bevisa att inga andra placeringar är möjliga.)*

Problem 2.5. *Ett kvadratisk* 6×6 *rutnät täcks av* 2×1 *dominobrickor. Bevisa att det finns en lodrätt eller vågrätt linje genom som inte skär igenom några av dominobrickor.*