Problemlösning och tävlingsmatematik

(*) Indikerar en generalisering av problemet som kan vara lite svårare. (**) Indikerar en generalisering som kan vara mycket svårare.

1. Det står 30 heltal skrivna på tavlan så att varje heltal är antingen -1 eller $+1$, och det är givet att produkten av talen är 1. Kan deras summa vara 0?

2. Anta att n är ett udda heltal (alltså inte delbart med två), och låt $f : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ vara en bijektion (det vill säga $\{1, \dots, n\}$ är bilden av f, och för alla $a \neq b$ så gäller att $f(a) \neq f(b)$). Bevisa att produkten
$$\prod_{i=1}^{n} (f(i) - i)$$
är ett jämnt heltal.

3. Finns det två positiva heltal x och y som uppfyller ekvationen $5x(x + 1) = 3(2y + 1)^3$?

4. Fem punkter $P_1, \dots, P_5$ i planet är givna så att både x- och y-koordinaterna av var och en av punkterna är heltal. Bevisa att bland de fem punkterna finns två punkter P_i och P_j så att deras mittpunkt också har heltalskoordinater. (Mittpunkten mellan A och B är den punkt som ligger på samma avstånd från A som från B.)

5. En låda innehåller 75 vita bollar och 150 svarta bollar. Det finns också en obegränsad mängd svarta bollar tillgängliga utanför lådan. Följande process upprepas tills det bara finns en boll kvar i lådan. I varje steg plockas 2 bollar ur lådan. Om

   (i) Båda bollarna är svarta, så läggs en av dem tillbaka i lådan.

   (ii) Om en av bollarna är svart och den andra är vit, så läggs den vita bollen tillbaka i lådan.

   (iii) Om båda bollarna är vita så tas båda bollarna bort från lådan, och en svart boll läggs i lådan.

   Går det att avgöra vilken färg den sista bollen i lådan kommer att ha, obreoende av de val som görs under processen?

6. Finns det två positiva heltal x och y så att $x^4 = y^4 + 2024$?

7. I en grupp på 9 personer, så är några par av personer vänner, och några är inte det. Vänskap är ömsesidig i betydelsen att om A anser att B är en vän, så anser B att A är en vän. Kan varje person ha exakt 3 vänner?

   (*) För vilka par (n, k) där $0 \leq k \leq n - 1$ är det möjligt att ha en grupp på n personer där varje person har exakt k vänner?

8. Talen 1, 2 och 3 står skrivna på tavlan. Det är 11 studenter i klassen. Studenterna går fram en och en till tavlan och byter plats på två av talen. Är det möjligt att talen i slutet är tillbaka i samma ordning, det vill säga 1, 2, 3?

   Som exempel så kan den första studenten byta plats på de två första talen, så att ordningen på talen blir 2, 1, 3. Sen kan nästa student byta plats på första och tredje talet, så att ordningen på talen blir 3, 1, 2.

   (*) Vad händer om det fortfarande finns 11 studenter, men talen $1, 2, \dots, 5$ är skrivna på tavlan?

   (**) Vad händer om det fortfarande finns 11 studenter, men talen $1, 2, \dots, n$ är skrivna på tavlan, för något positivt heltal n?

Problemlösning och tävlingsmatematik

(*) Indicates a generalisation of the problem that may be slightly more difficult. (**) Denotes a generalisation which may be substantially more difficult.

Problem 1. *There are* 30 *integers written on the board so that each of them is either* -1 *or* $+1$*, and it is given that their product is* 1*. Can their sum be equal to* 0*?*

Problem 2. *Suppose* n *is an odd integer (i.e. not divisible by* 2*), and let* $f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ *be a bijection (i.e.* $\{1, \ldots, n\}$ *is the image of* f*, and for all* $a \neq b$ *we have* $f(a) \neq f(b)$*). Prove that the product*

$$\prod_{i=1}^{n} (f(i) - i)$$

is an even integer.

Problem 3. *Does there exist positive integers* x *and* y *satisfying the equation* $5x(x + 1) = 3(2y + 1)^3$.

Problem 4. *Five points* $P_1, \ldots, P_5$ *are given on the plane so that both* x*- and* y*-coordinates of each of these points is an integer. Prove that there are two distinct points* P_i *and* P_j *among them so that their midpoint has also both of its coordinates being integers. (The midpoint of* A *and* B *is the point* P *on the line-segment joining* A *and* B *that is equidistant from both* A *and* B*).*

Problem 5. *A box is filled with* 75 *white balls and* 150 *black balls. There is also an unlimited supply of additional black balls available outside the box. The following process is repeated until only one ball is remaining in the box. At each stage,* 2 *balls are removed from the box. If*

(i) Both of the two balls are black, then one of the balls is placed back in the box.

(ii) If one of the balls is black and the other is white, the white ball is returned to the box.

(iii) If both of the balls are white, then both of them are removed, and a black ball is placed in the box.

Regardless of the choices made during the process, is it possible to determine the colour of the last ball in the box?

Problem 6. *Does there exist positive integers* x *and* y *so that* $x^4 = y^4 + 2024$.

Problem 7. *In a group of* 9 *people, some pairs of people are friends and some are not. Friendship is mutual in a sense that if* A *thinks that* B *is a friend, then* B *thinks that* A *is a friend. Can it happen that every person has exactly* 3 *friends?*

(*) For which pairs (n, k) *with* $0 \leq k \leq n - 1$ *is it possible to have a group of* n *people so that everyone has exactly* k *friends?*

Problem 8. *The numbers* 1*,* 2 *and* 3 *are written on the board. There are* 11 *students in the class. Every one of them walks to the board one by one, and each one of them swaps the positions of two numbers. Is it possible that at the end the numbers are still in the same order* 1*,* 2 *and* 3*?*

As an example, the first student may swap the first two numbers, leaving the board as 2*,* 1*,* 3*. Then the second student may swap the first and third numbers to leave the board as* 3*,* 1*,* 2*.*

(*) What if there are still 11 *students, but the numbers* $1, 2, \ldots, 5$ *are written on the board?*

(**) What if there are still 11 *students, but the numbers* $1, 2, \ldots, n$ *are written on the board for some* n*?*