Institutionen för matematik
och matematisk statistik
Fredrik Ohlsson
Olow Sande

UMEÅ UNIVERSITET

Matematikrepetition
Tekniskt-Naturvetenskapligt Basår

Det här kompendiet innehåller en kortfattade repetition av några av de förkunskaper som är särskilt viktiga för basårets matematikkurser, och dessutom är väldigt användbara på övriga kurser på basåret. Varje avsnitt innehåller en genomgång av viktiga begrepp, samband och metoder, samt ett antal övningsuppgifter där du kan testa att du behärskar materialet. För att du skall kunna tillgodogöra dig undervisning på basåret på bästa sätt rekommenderar vi att du arbetar igenom materialet i det här kompendiet innan du påbörjar dina studier på basåret. Ytterligare repetitionsuppgifter hittar du i kapitlet *+ Inför Kurs 3c* i kursboken *Matematik 5000+ Basåret 3c*.

Innehåll

1 Grundläggande aritmetik

Aritmetik är den del av matematiken som behandlar räkning med olika typer av tal. I det här kompendiet studerar vi de *reella talen* som omfattar de hela talen (t.ex. 4 och -1), de rationella talen (t.ex. $\frac{3}{7}$) och de irrationella talen (t.ex. π). Mängden av alla reella tal betecknas $\mathbb{R}$. Alla rella tal kan skrivas som en decimalutveckling, som kan vara antingen ändlig eller oändlig, t.ex.

$$\frac{3}{2} = 1.5\,, \quad \frac{2}{3} = 0.6666\ldots\,, \quad \pi = 3.1415\ldots\,.$$

1.1 De fyra räknesätten

Aritmetik kallas den del av matematiken som handlar om det som i vardagligt tal kallas räkning. De vanligaste och mest grundläggande räkneoperationerna, eller *aritmetiska* operationerna, är de fyra räknesätten; addition, subtraktion, multiplikation och division. Gemensamt för dessa operationer är att de tar två tal och bildar ett nytt tal.

Grundläggande aritmetiska operationer

Addition: $4 + 3 = 7$ (term + term = summa)
Subtraktion: 4 - 3 = 1 (term - term = differens)
Multiplikation: $4 \cdot 3 = 12$ (faktor $\cdot$ faktor = produkt)
Division: 12 / 3 = 4 (täljare / nämnare = kvot)
Notera att division med noll inte är definierat.

Ofta utelämnar vi multiplikationstecknet $\cdot$ och skriver en produkt som $a \cdot b = ab$ när det är tydligt vad som menas. Vi använder ibland även potensnotation för att besriva upprepad multiplikation, t.ex. $5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$. I dessa sammanhang är potensen alltid ett positivt heltal, men vi skall senare se att det går att definiera potenser för alla reella tal.

När flera aritmetiska operationer kombineras är det viktigt att resultatet är entydigt, d.v.s. bara kan tolkas på ett sätt. Därför ges de olika räknesätten olika prioritet. För att beskriva olika aritmetiska beräkningar kan vi dessutom använda parenteser. I en följd av beräkningar genomförs de aritmetiska operationerna alltid i följande *prioriteringsordning*:

1. Parenteser
2. Potenser
3. Multiplikation och division
4. Addition och subtraktion

Som följande exempel visar kan parenteser användas för att berskiva olika aritmetiska beräkningar som innehåller samma operationer.

Exempel 1.1

a) $2 + 3 \cdot 4 + 10/2 = 2 + 12 + 5 = 19\,,$

b) $(2 + 3) \cdot 4 + 10/2 = 5 \cdot 4 + 10/2 = 20 + 5 = 25\,,$

c) $(2 + 3) \cdot (4 + 10)/2 = 5 \cdot 14/2 = 35\,.$

Särskilt viktigt är det att vara uppmärksam på prioriteringsordningen när vi arbetar med division och tal på bråkform.

Exempel 1.2

Följande beräkning kan skrivas antingen på bråkform,

$$\frac{2+3\cdot 4}{15-8} = \frac{2+12}{15-8} = \frac{14}{7} = 2\,,$$

eller med hjälp av parenteser

$$(2+3\cdot 4)/(15-8) = (2+12)/(15-8) = 14/7 = 2\,.$$

Exemplen ovan visar att det är viktigt att vi är noggranna när vi skriver ner en aritmetisk beräkning, så att den verkligen motsvarar det vi vill beskriva. Detsamma gäller då vi använder miniräknare eller digitala vertyg för att genomföra beräkningar.

1.2 Negativa tal

Negativa tal är tal mindre än noll, d.v.s. tal på formen $-a$ där a är ett positivt tal. Vi påminner om räkneregler för addition och subtraktion med negativa tal.

Negativa tal: Addition och subtraktion

Låt a, b vara reella tal. Då gäller att

$$a + (-b) = a - b\,, \quad a - (-b) = a + b\,.$$

En omedelbar konsekvens av dessa samband är att vi alltid kan uttrycka subtraktion som addition med motsvarande negativa tal, d.v.s. addition och subtraktion är egentligen olika versioner av en och samma aritmetiska operation för de reella talen.

Vi påminner också om motsvarande räkneregler för multiplikation och division, som följer direkt av att vi alltid kan beskriva ett negativt tal som talet -1 multiplicerat med ett positivt tal a som $-a = (-1)\cdot a$.

Negativ tal: Multiplikation och division

Låt a, b vara rellea tal. Då gäller att

$$a\cdot(-b) = (-a)\cdot b = -ab\,, \quad (-a)\cdot(-b) = ab\,.$$

Om $b \neq 0$ gäller att

$$a/(-b) = (-a)/b = -a/b\,, \quad (-a)/(-b) = a/b\,.$$

1.3 Rationella tal och bråkräkning

Ett *rationellt tal*, eller mer vardagligt ett bråktal, är ett reellt tal som kan skrivas som en kvot mellan två heltal $\frac{a}{b}$ där $b \neq 0$. Exempel på rationella tal är

$$\frac{3}{2}\,, \quad \frac{145}{7}\,, \quad -\frac{2689}{1376}\,.$$

Tal som inte kan skrivas som en kvot mellan heltal, t.ex. π och $\sqrt{2}$, kallas *irrationella tal.*

Att multiplicera eller dividera både täljeren och nämnaren i ett rationellt tal med ett och samma nollskilda heltal ändrar inte på det rationella talet. Detta kallas att förlänga respektive förkorta det rationell talet, och är väldigt användbart vid beräkningar.

Rationella tal: Förlänga och förkorta

Låt a, b, c vara heltaltal med $b, c \neq 0$. Då gäller att

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}\,. \tag{1.1}$$

Beroende på i vilken riktning likheten används kallas detta att förlänga a/b med c, respektive att förkorta ac/bc med c.

Exempel 1.3

Det rationella talet 15/25 kan förlängas och förkortas enligt följande:

$$\text{a)}\ \frac{15}{25} = \frac{15 \cdot 10}{25 \cdot 10} = \frac{150}{250}\,, \qquad \text{b)}\ \frac{15}{25} = \frac{3 \cdot 5}{5 \cdot 5} = \frac{3}{5}\,.$$

Eftersom ett rationellt tal inte ändras när vi förlänger eller förkortar är det ofta praktiskt att förkorta det rationell talet tills det inte finns några gemensamma heltalsfaktorer i täljaren och nämnaren. Detta kallas att förkorta det rationella talet *så långt som möjligt.*

Exempel 1.4

Vi förkortar 525/70 så långt som möjligt genom att först faktorisera täljaren respektive nämnaren och sedan förkorta gemensamma faktorer

$$\frac{525}{70} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{3 \cdot 5}{2} = \frac{15}{2}$$

Addition och subtraktion

Precis som alla reella tal kan rationella tal adderas och subtraheras. Resultatet blir alltid ett nytt rationellt tal, som kan beräknas med hjälp av följande samband.

Rationella tal: Addition och subtraktion

Låt a, b, c vara heltal med $c \neq 0$. Då gäller att

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}\,. \tag{1.2}$$

För att addera eller subtrahera två rationella tal som inte har samma nämnare kan vi förlänga eller förkorta för att erhålla termer med samma nämnare.

Exempel 1.5

a) $\dfrac{3}{5}+\dfrac{6}{5}=\dfrac{3+6}{5}=\dfrac{9}{5}$

b) $\dfrac{7}{3}-1=\dfrac{7}{3}-\dfrac{3}{3}=\dfrac{7-3}{3}=\dfrac{4}{3}$

c) $\dfrac{3}{12}+\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{12}+\dfrac{6\cdot 3}{4\cdot 3}=\dfrac{3}{12}+\dfrac{18}{12}=\dfrac{3+18}{12}=\dfrac{21}{12}=\dfrac{3\cdot 7}{3\cdot 4}=\dfrac{7}{4}$

d) $\dfrac{3}{12}+\dfrac{6}{4}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{6}{4}=\dfrac{1+6}{4}=\dfrac{7}{4}$

Notera att i de sista två exemplen beräknas samma summa genom att addera, förlänga och/eller förkorta i olika ordningsföljd. Vilken ordningsföljd av operationer som är enklast att använda för att genomföra en given beräkning är inte alltid uppenbart. Därför är det viktigt att behärska alla räknetekniker väl.

Multiplikation och division

Även multiplikation och division av två rationella tal ger ett nytt rationellt tal. Vid multiplikation av rationella tal multipliceras täljare och nämnare var för sig.

Rationella tal: Multiplikation

Låt a, b, c, d vara heltal med $b, d \neq 0$. Då gäller att

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}=\frac{ac}{bd}\,. \tag{1.3}$$

Exempel 1.6

Beräkna

a) $\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{6}{5}$ b) $\dfrac{7}{3}\cdot 2$ c) $\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{6}{4}$

Lösn:

a) $\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{6}{5}=\dfrac{3\cdot 6}{5\cdot 5}=\dfrac{18}{25}$

b) $\dfrac{7}{3}\cdot 2=\dfrac{7}{3}\cdot\dfrac{2}{1}=\dfrac{7\cdot 2}{3\cdot 1}=\dfrac{14}{3}$

c) $\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{6}{4}=\dfrac{3\cdot 1\cdot 6}{4\cdot 3\cdot 4}=\dfrac{6}{4\cdot 4}=\dfrac{2\cdot 3}{2\cdot 2\cdot 4}=\dfrac{3}{2\cdot 4}=\dfrac{3}{8}$

Vid division med c/d använder vi oss av multiplikation med det *inverterade talet* d/c.

Rationella tal: Division

Låt a, b, c, d vara heltal med $b, c, d \neq 0$. Då gäller att

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} = \frac{ad}{bc}\,. \tag{1.4}$$

Exempel 1.7

a) $\frac{\frac{3}{5}}{\frac{6}{5}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{6} = \frac{3 \cdot 5}{5 \cdot 6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

b) $\frac{\frac{7}{3}}{2} = \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{3 \cdot 2} = \frac{7}{6}$

c) $\frac{\frac{3}{7} \cdot \frac{3}{4}}{\frac{2}{5}} = \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{2} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 5}{7 \cdot 4 \cdot 2} = \frac{45}{56}$

När vi beräknar produkter eller kvoter av rationella tal är det ofta praktiskt att genomföra förkortningar i de mellanliggande stegen som vi har gjort i exemplen ovan.

På motsvarande sätt som vi tidigare såg att subtraktion med b kunde betraktas som addition av talet $-b$, noterar vi att division med ett tal d kan uttryckas som multiplikation med det inverterade talet $1/d$,

$$\frac{a}{d} = \frac{a}{1} \cdot \frac{1}{d} = a \cdot \frac{1}{d}\,.$$

Alltså är multiplikation och division olika versioner av samma aritmetiska operation.

Avslutningsvis konstaterar vi att alla samband (1.1)-(1.4) som vi studerat i det här avsnittet om rationella tal gäller även då a, b, c, d är godtyckliga reella tal, d.v.s. inte nödvändigtvis heltal.

1.4 Övningsuppgifter

1.1 Beräkna

a) $5 - 3 \cdot 2 + 2$

b) $2 \cdot 10 - 8 \cdot (2 + 1)$

c) $(5 + 2 \cdot 3) - 12/(2 \cdot 2 - 1)$

d) $3 \cdot 2^2 - 5^2$

1.2 Beräkna

a) $14 - 2^3 + 3 \cdot (1 + 3^2)$

b) $(7 - 3) \cdot (-1 + 5)/16$

c) $(13 - 3)^3$

d) $15 - 2 \cdot (2 - 2) - 3/(6 + 1 - 2 \cdot 2)$

1.3 Beräkna

a) $(-1) + (-2) + 3 \cdot (1 + 3)$

b) $(-1) \cdot (-2) + (3 - 5) \cdot (1 + 3 \cdot 2)$

c) $(-3) - (-8) + (-1) \cdot (-3) \cdot (-2)$

d) $(-1) + (-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4$

1.4 Förenkla följande bråk så långt som möjligt

a) $\dfrac{30}{105}$ b) $\dfrac{15+17}{6}$ c) $\dfrac{2^8}{2^3}$ d) $\dfrac{315}{143}$

1.5 Beräkna

a) $\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{6}$ b) $\dfrac{5}{2} - \dfrac{2}{3}$ c) $2 + \dfrac{1}{3} - \dfrac{7}{3}$ d) $\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{5} - \dfrac{3}{10}$

1.6 Beräkna

a) $\dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2}{5}$

b) $\dfrac{8}{3} \cdot \left(\dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{5}\right)$

c) $-\dfrac{7}{4} \cdot \dfrac{(-2)}{5} \cdot \dfrac{15}{(-3)}$

d) $\dfrac{5 + 2 \cdot 3}{3 - 5} \cdot \left(\dfrac{2}{5}\right)^2$

1.7 Beräkna

a) $\dfrac{\frac{5}{2}}{\frac{3}{5}}$ b) $\dfrac{\frac{5+3\cdot 3}{3-5}}{5}$ c) $\dfrac{\frac{12}{7}}{\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5}}$ d) $\dfrac{\frac{5}{16} - \frac{1}{4}}{\frac{5}{8}}$

2 Algebraiska uttryck

Algebra är en del av matematiken som *abstraherar* den aritmetik som vi repeterade i föregående avsnitt genom att studera uttryck och samband som innehåller variabler, d.v.s. symboler som representerar okända tal.

2.1 Algebraiska uttryck

Vi börjar med att definiera ett centralt begrepp inom algebra.

Algebraiska uttryck

Ett *algebraiskt uttryck* är ett uttryck som består av

- tal (t.ex. 4, -1, $3/7$, π),
- variabler (t.ex. a, b, c, d),
- operationer (t.ex. $+$, $-$ $\cdot$, $/$).

Algebraiska uttryck innehåller **inte** likheter eller olikheter (t.ex. $=$, $<$, $\neq$, $\geq$).

Exempel 2.1

a) $10 + 40$ är **inte** ett algebraiskt uttryck eftersom det inte innehåller variabler.

b) $10x + 40$ **är** ett algebraiskt uttryck i variabeln x.

c) $y = 10x+40$ är **inte** ett algebraiskt uttryck, utan en likhet mellan två uttryck.

d) $3x(x + y)$ **är** ett algebraisk uttryck i variablerna x och y.

På samma sätt som variabler representerar ett algebraiskt uttryck ett okänt tal; vilket tal beror på värdet på de ingående variablerna. Att bestämma vilket tal ett algebraiskt uttryck representerar för givna värden på variablerna kallas att bestämma uttryckets värde.

Exempel 2.2

Bestäm värdet av uttrycket $10x + 40$ för $x = 3$.

Lösn: Om $x = 3$ är

$$10x + 40 = 10 \cdot 3 + 40 = 30 + 40 = 70\,.$$

Svar: Uttrycket har värdet 70.

2.2 Omskrivningar av uttryck

Vi skall nu studera olika sätt att skriva om algebraiska uttryck, vilket innebär att ersätta ett algebraiskt uttryck med ett annat som representerar samma tal för alla möjliga värden på de ingående variablerna. Vi börjar med att repetera några viktiga algebraiska räkneregler (som vi implicit använt redan i föregående avsnitt).

Algebraiska räkneregler

Låt a, b, c, d vara reella tal. Då gäller att

$$a + b = b + a\,, \quad a \cdot b = b \cdot a\,,$$
$$a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c\,, \quad a(bc) = (ab)c = abc\,,$$
$$a(b + c) = ab + ac\,, \quad (a + b)c = ac + bc\,,$$
$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd\,.$$

Att kunna manipulera algebraiska uttryck är viktigt och kan vara mycket användbart i praktiken, där vi ibland stöter på algebraiska uttryck som kan vara väldigt komplicerade. Följande namn används för att beskriva några av de vanligaste typerna av omskrivningar.

Omskrivningar av uttryck

- **Utveckla:** skriv som summa
- **Faktorisera:** skriv som produkt ("bryt ut")
- **Förenkla:** skriv med så få operationer som möjligt

Exempel 2.3

a) Utveckla $3x(x + y)$.

Lösn: $3x(x + y) = 3x \cdot x + 3x \cdot y = 3x^2 + 3xy$

b) Faktorisera $3x(x + y)$.

Lösn: $3x^2 + 3xy = 3x \cdot x + 3x \cdot y = 3x(x + y)$

c) Förenkla $3x - 2x(1 + x)$.

Lösn: $3x - 2x(1 + x) = 3x - 2x \cdot 1 - 2x \cdot x = 3x - 2x - 2x^2 = x - 2x^2$

Vi tolkar i regel *förenkla* som *utveckla och förenkla så långt som möjligt*. Notera också att vi kan tänka på att utveckla och att faktorisera som varandras motsatser, t.ex. genom att använda räkneregeln $a(b + c) = ab + ac$ från vänster till höger (utveckla) eller från höger till vänster (faktorisera). Alla räkneregler kan på motvarande sätt användas "i båda riktningarna". I allmänhet finns det flera olika sekvenser av omskrivningar av ett algebraiskt uttryck som ger samma resultat. Det är mycket användbart att öva på att använda olika strategier och räkneregler för att säkert kunna manipulera algebraiska uttryck.

Exempel 2.4

Förenkla $x(2 + x) - x(x - 5)$ så långt som möjligt.

Lösn:

$$\begin{aligned} & x(2 + x) - x(x - 5) && \text{utveckla} \\ = \; & 2x + x^2 - x^2 + 5x && \text{förenkla} \\ = \; & 7x \end{aligned}$$

Exempel 2.5

Förenkla $(x+2)(x^2+2x+1) - x(x^2+2x+1)$.

Lösn: Här kan vi såklart utveckla de två termerna var för sig och sedan förenkla. Det är dock mer effektivt att notera att (x^2+2x+1) är en gemensam faktor i de båda termerna, vilket vi kan använda för att först faktorisera och sedan förenkla uttrycket.

$$\begin{aligned} & (x+2)(x^2+2x+1) - x(x^2+2x+1) && \text{bryt ut } (x^2+2x+1) \\ = \; & (x+2-x)(x^2+2x+1) && \text{förenkla } (x+2-x) \\ = \; & 2(x^2+2x+1) && \text{utveckla} \\ = \; & 2x^2+4x+2 \end{aligned}$$

Att skriva om ett algebraiskt uttryck ändrar, som vi tidigare noterat, inte på det tal det representerar.

Exempel 2.6

I ett exempel ovan såg vi att vi kunde skriva om $x(2+x) - x(x-5) = 7x$. Om $x = 1$ har vi att

$$x(2+x) - x(x-5) = 1 \cdot (2+1) - 1 \cdot (1-5) = 1 \cdot 3 - 1 \cdot (-4) = 7$$

och

$$7x = 7 \cdot 1 = 7\,.$$

Detta gör att vi kan upptäcka fel i omskrivningar genom att undersöka uttryckens värden för olika värden på de ingående variablerna.

Exempel 2.7

Kan $(a+b)(a-b) + (a+b)^2$ skrivas som $a(a+b)$?

Lösn: Om $a = 1$, $b = 2$ har vi att

$$(a+b)(a-b) + (a+b)^2 = (1+2)(1-2) + (1+2)^2 = 3 \cdot (-1) + 3^2 = 6$$

men

$$a(a+b) = 1 \cdot (1+2) = 1 \cdot 3 = 3\,.$$

Svar: Nej, $(a+b)(a-b) + (a+b)^2$ kan inte skrivas som $a(a+b)$.

Det omvända gäller dock inte; vi kan inte vara **säkra** på att två uttryck är lika genom att testa enstaka värden på variablerna.

Exempel 2.8

Om $a = 1$, $b = -1$ har vi att

$$(a+b)(a-b) + (a+b)^2 = (1+(-1))(1-(-1)) + (1+(-1))^2 = 0 \cdot 2 + 0^2 = 0$$

och

$$a(a+b) = 1 \cdot (1+(-1)) = 1 \cdot 0 = 0\,.$$

Trots detta vet vi att $(a+b)(a-b)+(a+b)^2$ **inte** kan skrivas som $a(a+b)$.

2.3 Konjugat- och kvadreringsregler

I alla algebraiska uttryck kan vi ersätt variablerna, t.ex. a, b, c, med andra algebraiska uttryck som representerar samma tal. Detta gör att vi kan härleda en mängd användbara algebraiska samband från de grundläggande räknereglerna. Vi börjar med att härleda det välkända sambandet för att multiplicera två summor

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd\,. \tag{2.1}$$

Exempel 2.9

Vi använder de grundläggande räknereglerna för produkten av ett tal och en summa upprepade gånger, vilket ger:

$$\begin{aligned}
& (a+b)\underbrace{(c+d)}_{=z} && \Big| \text{ utveckla } (a+b)z = az + bz \\
= \;& a(c+d) + b(c+d) && \Big| \text{ utveckla } a(c+d) = ac + ad \\
= \;& ab + ad + bc + bd
\end{aligned}$$

Från sambandet (2.1) kan vi direkt härleda några viktiga och vanligt förekommande samband, som dessutom är mycket användbara vid algebraiska beräkningar. Det första sambandet kallas *konjugatregeln*, eftersom de två algebraiska uttrycken $(a+b)$ och $(a-b)$ klallas för varandras konjugat. Därefter följer *kvadreringsreglerna* vars namn torde vara självförklarande.

Konjugatregeln

Låt a, b vara reella tal. Då gäller att

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2\,. \tag{2.2}$$

Kvadreringsregeln

Låt a, b vara reella tal. Då gäller att

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2\,. \tag{2.3}$$

Vi avslutar det här svsnittet med några exempel på användning av konjugat- och kvadreringsregeln.

Exempel 2.10

Utveckla $(x+5)(x-5)$.

Lösn: Vi använder konjugatreglen $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ med $a=x$ och $b=5$.

$$\begin{aligned}
& (x+5)(x-5) && \text{konjugatreglen} \quad (a+b)(a-b)=a^2-b^2 \\
={}& x^2-5^2 && \text{förenkla} \\
={}& x^2-25
\end{aligned}$$

Exempel 2.11

Utveckla $(2x+5y)(2x-5y)$.

Lösn: Uttrycken $(2x+5y)$ och $(2x-5y)$ är varandras konjugat, vi utvecklar med hjälp av konjugatregeln.

$$\begin{aligned}
& (\underbrace{2x}_{=a}+\underbrace{5y}_{=b})(2x-5y) && \text{konjugatreglen} \quad (a+b)(a-b)=a^2-b^2 \\
={}& (2x)^2-(5y)^2 && \text{förenkla} \quad (ab)^2=ab\cdot ab=a^2b^2 \\
={}& 4x^2-25y^2
\end{aligned}$$

Exempel 2.12

Utveckla $\left(\dfrac{3}{2}+4y\right)^2$.

Lösn: Uttrycket är en kvadrat av en summa, vilket betyder att vi kan använda kvadreringsregeln för att utveckla.

$$\begin{aligned}
& \left(\underbrace{\frac{3}{2}}_{=a}+\underbrace{4y}_{=b}\right)^2 && \text{kvadreringsregeln} \quad (a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \\
={}& \left(\frac{3}{2}\right)^2+2\cdot\frac{3}{2}\cdot 4y+(4y)^2 && \text{förenkla} \\
={}& \tfrac{9}{4}+12y+16y^2
\end{aligned}$$

Exempel 2.13

Faktorisera $2x^3 - 12x^2 + 18x$.

Lösn: Vi genomför först en faktorisering och skriver sedan om en av faktorerna med hjälp av kvadreringsregeln för att faktorisera det ursprungliga uttrycket fullständigt.

$$\begin{array}{rl|l} & 2x^3 - 12x^2 + 18x & \text{bryt ut } 2x \\ = & 2x(x^2 - 6x + 9) & \text{skriv om} \\ = & 2x(\underbrace{x^2}_{a=x} - 2 \cdot 3 \cdot x + \underbrace{3^2}_{b=3}) & \text{kvadreringsregeln} \quad a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 \\ = & 2x(x-3)^2 & \end{array}$$

I fortsättning kommer vi ofta att nöja oss med att antingen ange namnet eller det algebraiska sambandet för den räkneregel som används de olika stegen i en uträkning.

2.4 Övningsuppgifter

2.1 Bestäm värdet av följande uttryck för de givna värdena av de ingående variablera.

a) $2x^2 - (2x)^2$ för $x = 3$

b) $2(y + 10) + y(3 - y)$ för $y = -1$

c) $(a + b)^2 - 2b - a^3$ för $a = 2$, $b = 5$

d) $\dfrac{a+2}{b+2} - \dfrac{1}{b^2}$ för $a = 3$, $b = 2$

2.2 Förenkla följande uttryck så långt som möjligt.

a) $(x^2 - 5x) + (2x + 1)$

b) $(a^2 + 2a + 5) - (3a^2 - 2a + 3)$

c) $(5x^2 + xy - y^2) + (xy - 3x^2 - 3y^2)$

d) $(a^2 + 1) - 2(a + 1) + (1 + 2a - a^2)$

2.3 Utveckla och förenkla följande uttryck så långt som möjligt.

a) $(2x + 3)(1 - x)$

b) $x(2x + 1)(x + 1)$

c) $(1 - 3x)2x + (4x - 1)(3 + 2x)$

d) $(xy + x^2)(y + 5x)$

2.4 Faktorisera följande uttryck så långt som möjligt.

a) $4x^2 + 20x$

b) $2x + 2a + b(x + a)$

c) $y^2 + xy^2 + y + xy$

d) $2(x + 1)(x + 5) - 3(x + 2)(x + 3) + 2(x + 4)$

2.5 Härled konjugat- och kvadreringsreglerna från (2.1)

2.6 Utveckla och förenkla följande uttryck så långt som möjligt.

a) $(2x + y)(2x - y)$

b) $(x^2 + 4)^2$

c) $(x + 1)(x - 1)(x^2 + 1)$

d) $(x + y)^2(x - y) - (x + y)(x^2 - y^2)$

2.7 Faktorisera följande uttryck så långt som möjligt.

a) $3x^2 - 27$ b) $a^3 + 2a^2 + a$ c) $x^4 - 4x^2y^2$ d) $y^6 - 2y^3 + 1$

2.8 Förenkla följande uttryck så långt som möjligt.

a) $(x + y - z)(x - y + z) - x^2 + y^2 + z^2$ b) $\dfrac{x^{10} - x^9}{x^8}$

3 Funktioner, ekvationer och olikheter

De algebraiska uttryck som vi studerade i föregående avsnitt kan ses som byggstenar för matematiken. I det här avsnittet skall vi studera några olika matematiska objekt som kan konstrueras i termer av algebraiska uttryck. Dessa kommer att spela en viktig roll i matematikkurserna på basåret och utgör grunden för många delar av den matematik som studeras i grundkurser på universitetet.

3.1 Funktioner

Funktioner

En *funktion* $y = f(x)$ är en regel som för varje tillåtet värde på x ger ett värde på y. I termer av ett algebraiskt uttryck som innehåller variabeln x kan vi också säga att en funktion är en regel på formen

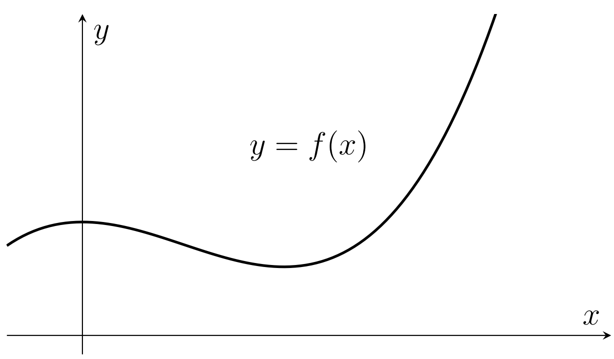
$$f(x) = \boxed{\text{“uttryck”}}$$

Variabeln x kallas för funktionens *argument*, de tillåtna värden på x kallas funktionens *definitionsmängd*, och de möjliga värden som $f(x)$ kan anta kallas funktionens *värdemängd*.

Det finns flera relaterade sätt att ange en funktion som är vanliga i tekniska och naturvetenskapliga sammanhang. Ett sätt är att helt enkelt ange det uttryck som definierar funktionen $f(x)$, detta kallas även *formeln* för $f(x)$. Vi kan också för varje värde x i definitionsmängden ange motsvarande funktionsvärde $f(x)$ i en *värdetabell*:

x	$f(x)$
0	1
1	2
2	5
$\vdots$	$\vdots$

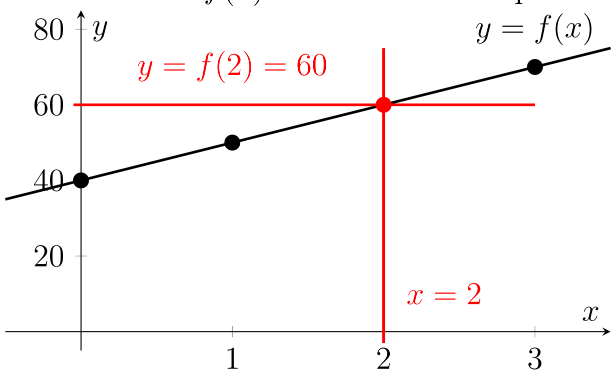
Slutligen kan vi ange *funktionsgrafen* $y = f(x)$ och använda den för att genom avläsning bestämma funktionsvärdet $f(x)$ för ett givet värde på x.



Exempel 3.1

Betrakta funktionen $f(x) = 10x + 40$. Funktionen är definierad för alla rella tal, d.v.s. för varje reellt tal x är $f(x)$ ett annat väldefinierat tal. Vi kan också representera funktionen genom dess graf $y = f(x) = 10x + 40$ eller som en värdetabell. Observera dock att värdetabellen i det här fallet bara innehåller funktionens värde i fyra olika punkter, och därför inte beskriver $f(x)$ för andra värden på x.

x	$f(x)$
0	40
1	50
$\boxed{2}$	$\boxed{60}$
3	70



Funktionens värde för $x = 2$ kan bestämmas genom att bestämma värdet av det algebraiska uttrycket $10x + 40$, läsa av y-koordinaten i funktionens graf, eller läsa av raden motsvarande $x = 2$ i värdetabellen. Notera att dessa ger samma resultat.

$$f(2) = 10 \cdot 2 + 40 = 20 + 40 = 60\,.$$

En vanlig situation i matematiken och dess tillämpningar är att konstruera en funktion som beskriver ett givet samband. Vi studerar här ett enklet exempel; vi kommer att stöta på många fler i basårets matematikkurser.

Exempel 3.2

En taxisresa kostar 10 kr/km och 40 kr i startavgift. Bestäm funktionen $f(x)$ som beskriver konstnaden för en resa på x km.

Lösn: Kostnaden för resan ges av

$$\underbrace{(\text{kostnad per km})}_{=10\text{ kr/km}} \cdot \underbrace{(\text{antal km})}_{=x\text{ km}} + \underbrace{(\text{startavgift})}_{=40\text{ kr}}$$

Alltså kan vi beskriva konstnaden med funktionen $f(x) = 10x+40$, d.v.s. kosntaden för en resa på x km ges av funktionsvärdet $f(x)$ kr.

Svar: $f(x) = 10x + 40$

Funktioner av en eller flera variabler kan också förekomma som delar i algebraiska uttryck, vilket vi t.ex. kommer att stöta på när vi studerar derivatan av en funktion. Här nöjer vi oss återigen med att titta på ett enklare exempel.

Exempel 3.3

Låt $f(x) = 2x + 3$ och förenkla uttrycket $f(a + 1) - (a - 1)$.

Lösn: Vi börjar med att skriva om uttrycket $f(a + 1) - (a - 1)$ genom att sätta in $x = a + 1$ som argument i funktionen $f(x)$, och förenklar sedan det resulterande uttrycket.

$$\begin{aligned}
& f(a+1) - (a-1) && \Big| \; f(x) = 2x + 3 \\
=\ & (2(a+1) + 3) - (a-1) && \Big| \; \text{utveckla} \\
=\ & 2a + 2 + 3 - a + 1 && \Big| \; \text{förenkla} \\
=\ & a + 6
\end{aligned}$$

3.2 Ekvationer och olikheter

Ekvationer

En *ekvation* är ett påstående om att två storheter är lika. Om dessa storheter representeras av algebraiska uttryck i varibeln x kan vi också säga att en ekvation är ett uttryck på formen

$$\boxed{\text{“uttryck”}} = \boxed{\text{“uttryck”}}$$

Uttrycket till vänster om likhetstecknet kallas ekvationens *vänsterled* (VL) och uttrycket till höger för ekvationens *högerled* (HL). *Lösningarna* (eller *rötterna*) till ekvationen är alla tal x sådana att VL=HL.

Att bestämma lösningarna till en ekvation kallas att *lösa* ekvationen, och är en av de vanligaste sakerna vi gör i matematiken. För att lösa en ekvation kan vi systematiskt ersätta den med en “enklare” ekvation som har *samma lösningar* som den ursprungliga ekvationen. Detta kan vi göra genom att till både VL och HL addera/subtrahera samma reella tal, eller genom att multiuplicera/dividera både VL och HL med samma nollskilda reella tal. Detta kallas ibland för att *balansera* ekvationen och är den mest grundläggande formen av ekvationslösning.

Exempel 3.4

En taxisresa kostar 10 kr/km och 40 kr i startavgift. Hur långt kan vi åka taxi för 90 kr?

Lösn: Vi vet sedan tidigare exempel att priset för en resa på x km ges av funktionen $f(x) = 10x + 40$. Vi söker lösningen till ekvationen $f(x) = 90$ genom att balansera ekvationen.

$$\begin{array}{rcl|l} f(x) & = & 90 & f(x) = 10x + 40 \\ 10x + 40 & = & 90 & -40 \\ 10x & = & 50 & \cdot \frac{1}{10} \\ x & = & 5 & \end{array}$$

Svar: Vi kan åka taxi 5 km för 90 kr.

Vi noterar att ekvationerna $10x + 40 = 90$, $10x = 50$ och $x = 5$ som förekommer i exemplet ovan är *olika ekvationer* eftersom de algebraiska uttrycken i VL respektive HL är olika. Det väsentliga är att de har *samma lösning* $x = 5$, eftersom $10 \cdot 5 + 40 = 90$, $10 \cdot 5 = 50$ och $5 = 5$. Detta illustrerar varför lösningen till den ursprungliga ekvationen fås genom att balansera.

Vi skall i basårets matematikkurser studera andra typer av transformationer som vi kan använda för att skriva om en ekvation, och andra lösnignsmetoder. Notera dock att det alltid är viktigt att vi genomför samma operation på både VL och HL när vi manipulerar ekvaitoner.

Att testa lösningar

Vi kan alltid *testa* om ett tal x är en lösning till en ekvation genom *insättning* i VL respektive HL. Ibland kan vi därför hitta lösningar till en ekvation genom att göra en gissning (ofta baserad på hur ekvationen ser ut), och sedan testa om det faktiskt är en lösning genom att undersöka om VL = HL.

Exempel 3.5

Är $x = -1$ en lösning till $x^2 = 3x + 4$?

Lösn: Insättning i VL och HL ger

$$\text{VL} = x^2 = (-1)^2 = 1\,, \quad \text{HL} = 3x + 4 = 3 \cdot (-1) + 4 = 1\,.$$

Alltså är VL = HL för $x = -1$.

Svar: Ja, $x = -1$ är en lösning.

Olikheter

En *olikhet* är ett påstående om hur två storheter förhåller sig till varandra. Om dessa storheter representeras av algebraiska uttryck i varibeln x kan vi ange förhållandet genom att använda olikhetstecknen $<, \leq, >, \geq, \neq$ för att uttrycka olikheten, t.ex.,

$$\boxed{\text{“uttryck”}} > \boxed{\text{“uttryck”}}.$$

På samma sätt som för ekvationer kallas olikhetens delar för *vänsterled* (VL) respektive *högerled* (HL). *Lösningarna* till olikheten är alla tal x sådana att olikheten är uppfylld, t.ex. VL $>$ HL.

Mängden av lösningar till en ekvation är ofta isolerade värden medans lösningarna till olikheter ofta är en eller flera intervall som innehåller oändligt många lösningar.

Exempel 3.6

Ett nytt taxibolag etablerar sig is samma stad som taxibolaget i föregående uppgift. Det nya bolaget har ingen startavgift men deras resor kostar 20 kr/km. För vilka sträckor är det billigare att åka med det nya bolaget?

Lösn: Vi kan lösa problemet genom att först konstruera en funktion för kostnaden med det nya bolaget, och sedan jämföra den med motsvarnade funktion för det gamla bolaget.

Kostnad för gamla bolaget: $f(x) = 10x + 40$
Kostnad för nya bolaget: $g(x) = 20x$

Vi söker de sträckor x som löser olikheten $g(x) < f(x)$.

$$\begin{array}{rcl|l} g(x) & < & f(x) & g(x) = 20x, f(x) = 10x + 40 \\ 20x & < & 10x + 40 & -10x \\ 10x & < & 40 & \cdot \frac{1}{10} \\ x & < & 4 & \end{array}$$

Svar: För sträckor x $<$ 4 km är det nya bolaget billigare.

För att bestämma lösningarna till en olikheter kan vi manipulera dem på liknande sätt som ekvationer. Det finns dock en viktig skillnad: Om vi multiplicerar (eller dividerar) båda leden i en olikhet med ett *negativt tal* måste vi *vända på olikhetstecknet*. Vi illustrerar detta med ett enkelt exempel.

Exempel 3.7

Lös olikheten $3 - x \leq 5$.

Lösn: Vi löser först olikheten genom att bara använda addition (och subtraktion).

$$\begin{array}{rcl|l} 3 - x & \leq & 5 & -5 + x \\ -2 & \leq & x & \\ \multicolumn{1}{r}{x} & \geq & -2 \end{array}$$

Sedan löser vi olikheten igen, den här gången genom att använda multiplikation av båda leden med ett negativt tal.

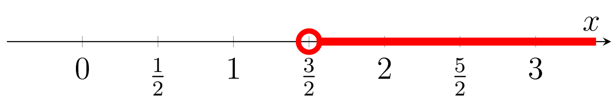
$$\begin{array}{rcl|l} 3 - x & \leq & 5 & -3 \\ -x & \leq & 2 & \cdot(-1)\text{, olikhetstecknet vänds} \\ \multicolumn{1}{r}{x} & \geq & -2 \end{array}$$

Vi illustrerar ofta lösnignarna till en olikhet genom att markera motsvarande intervall på tallinjen. I dessa sammanhang betyder en ifylld cirkel (●) en punkt som *ingår* i lösningsmängden, medan en tom cirkel (○) betyder en punkt som *inte ingår*.

Exempel 3.8

Illustrera $x > \frac{3}{2}$ på tallinjen.

Lösn: Vi markerar alla punkter x som uppfyller olikheten. Notera att punkten $x = \frac{3}{2}$ inte uppfyller olikheten, och att mängden av punkter som uppfyller olikheten sträcker sig mot oändligheten längs positiva x-axeln.



I många sammanhang kommer vi att stöta på uttryck som innehåller mer än en olikhet. Dessa kan anges genom en lista av enklare olikheter, eller som ett *intervall*, t.ex. $a < x \leq b$. Vi tolkar intervall som två olikheter som skall uppfyllas samtidigt.

Exempel 3.9

Illustrera olikheten $1 \leq x < 2$ på tallinjen.

Lösn: Vi markerar alla punkter x på tallinjen som uppfyller både $1 \leq x$ och $x < 2$. Notera att $x = 1$ är en lösning till olikheten, men att $x = 2$ inte är det.

3.3 Grafer, ekvationer och olikheter

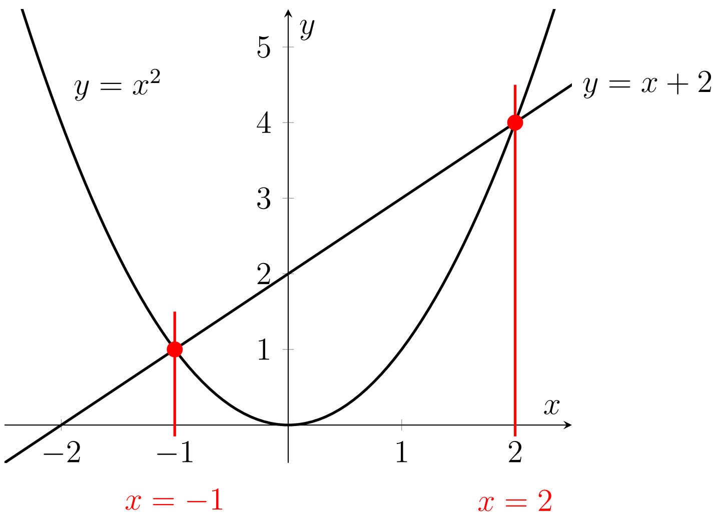
Funktionsgrafer är ett väldigt användbart verktyg för att förstå lösningarna till en ekvation, t.ex. förstå hur många lösningar ekvationen har och vilka de är. Detta bygger på att lösningarna till ekvationen $f(x) = g(x)$, d.v.s. de tal x för vilka $f(x)$ och $g(x)$ är lika, motsvarar *skärningspunkterna* mellan graferna $y = f(x)$ och $y = g(x)$.

På samma sätt kan vi använda funktionsgrafer för att förstå lösningarna till olikheter; t.ex. svarar lösnignarna till $f(x) < g(x)$ mot de punkter där grafen $y = f(x)$ ligger under grafen $y = g(x)$.

Att approximativt bestämma lösningarna till en ekvation eller en olikhet från funktionsgrafer kallas för en *grafisk lösning*. Detta skall jämföras med att bestämma exakta lösningar med hjälp av algebraiska manipulationer, vilket kallas för en *algebraisk lösning*.

Exempel 3.10

Betrakta ekvationen $x^2 = x+2$. Vi ritar graferna $y = f(x) = x^2$ och $y = g(x) = x+2$ och identifierar samtliga skärningspunkter.

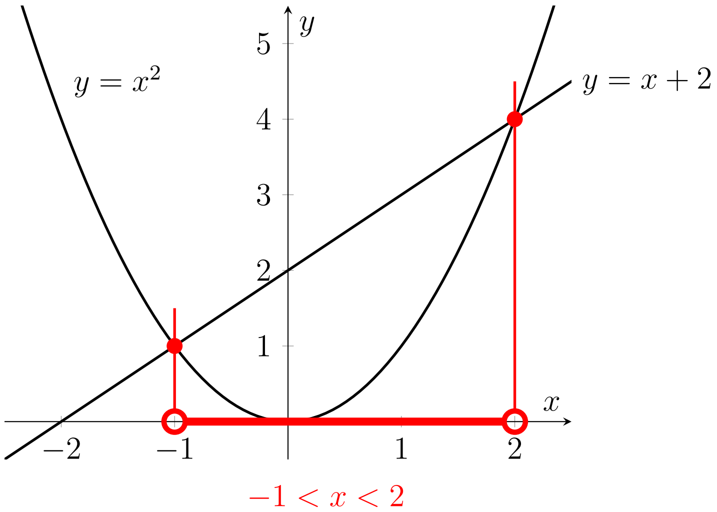


Vi ser att det finns två skräningspunkter, med $x = -1$ respektive $x = 2$. Alltså är $x = -1$ och $x = 2$ lösningarna till ekvationen $x^2 = x + 2$.

Exempel 3.11

Betrakta olikheten $x^2 < x + 2$. Från figuren i föregående exempel ser vi att grafen $y = x^2$ ligger under grafen $y = x + 2$ för alla punkter i intervallet $-1 < x < 2$. Notera att i skärningspunkterna $x = -1$ och $x = 2$ motsvarar punkter där funktionernas grafer 'byter plats', och därmed utgör start- och slutpunkter för det sökta intervallet.

I det här fallet har vi en *strikt* olikhet, vilket betyder att skärningspunkterna själva inte ingår i intervallet. Vi markerar alla lösningar till olikheten på x-axeln.



3.4 Övningsuppgifter

3.1 Betrakta funktionen $f(x) = x^3 + 2x^2$.

a) Bestäm funktionens värde för $x = -3, -2, -1, 0, 1$.

b) Använda resultatet i a) för att konstruera en enkel skiss av grafen $y = f(x)$.

3.2 Låt $f(x) = 6x + 2$.

a) Bestäm $f(a + 3)$ om $a = 1$.

b) Förenkla $f(3 + h) - f(3)$.

c) Förenkla $f(a + h) - f(a)$.

3.3 a) Avgör om $x = 1$ är en lösning till $\dfrac{4}{x} = x + 3$.

b) Avgör om $x = -1$ är en lösning till $\dfrac{1}{x} = 2x + 3$.

c) Avgör om $x = -1$ är en lösning till $(x - 1)^3 = x^2 - 3x - 12$.

3.4 Lös följande ekvationer algebraiskt.

a) $2x = 3$

b) $x + 4 = 2$

c) $5 = 2x - 1$

d) $2x = x$

3.5 Lös följande ekvationer algebraiskt.

a) $-5x + 1 = x + 3$

b) $x + 1 = x + 3$

c) $(x+1)^2 = x^2$

d) $(x-1)^2 = x^2 + 2x + 1$

3.6 Lös följande olikheter algebraiskt.

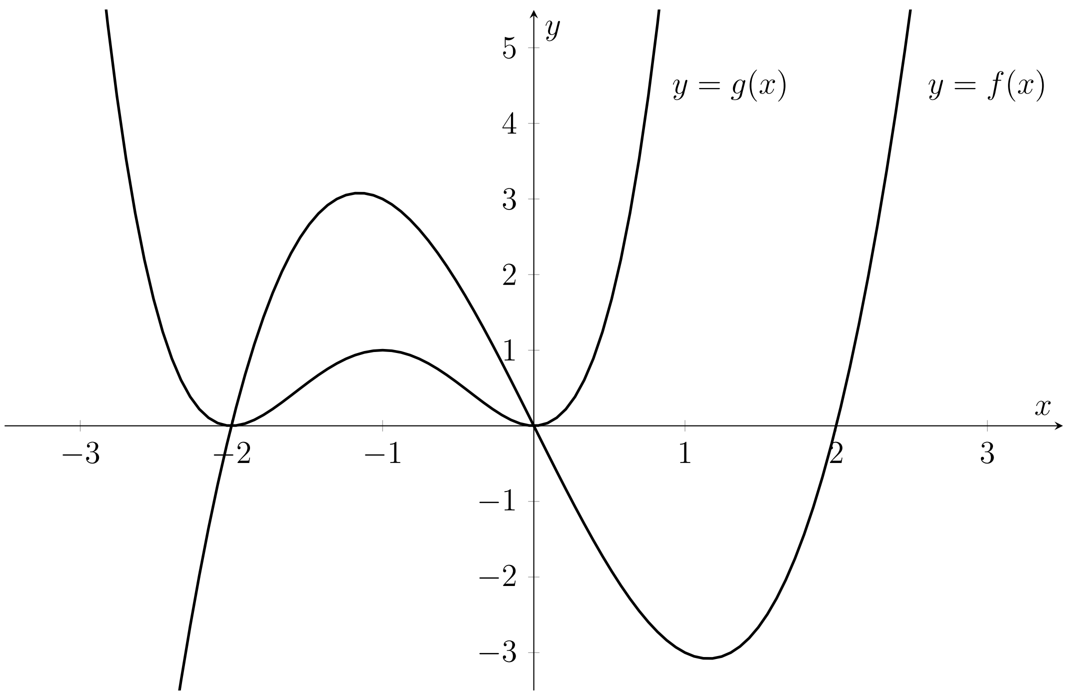
a) $x + 1 \geq 0$

b) $2x - 1 < 5$

c) $6 - 2x \leq x + 2$

d) $x + 1 > x + 2$

3.7 I figuren nedan visas graferna $y = f(x)$ och $y = g(x)$ för funktionerna $f(x) = x^3 - 4x$ och $g(x) = x^4 + 4x^3 + 4x^2$.



a) Bestäm samtliga lösnignar till ekvationen $f(x) = 0$.

b) Bestäm samtliga lösnignar till ekvationen $f(x) = g(x)$.

c) Bestäm samtliga lösnignar till olikheten $f(x) > g(x)$.

3.8 Låt $f(x) = 3x - 3$ och $g(x) = 2x + 1$. Lös ekvationen $f(2x) = g(x+3)$ algebraiskt.

4 Linjära funktioner och räta linjens ekvation

I det här avsnittet skall vi studera en enkel men viktig typ av funktioner och ekvationer, nämligen *linjära funktioner* och *linjära ekvationer*. Trots sin enkelhet dyker dessa funktioner upp i en mängd olika sammanhang inom teknik och naturvetenskap.

4.1 Linjära funktioner

En linjär funktion kan beskrivas som en funktion $f(x)$ där förändringen av funktionsvärdet är proportionellt mot förändringen av variabeln x.

Linjära funktioner

En *linjär funktion* är en funktion på formen

$$f(x) = kx + m$$

där k och m är konstanter.

Exempel 4.1

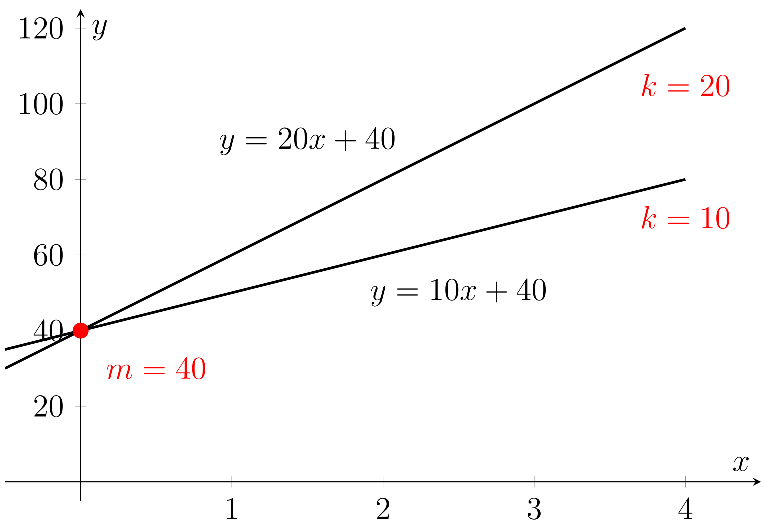
a) $f(x) = 10x + 40$ **är** en linjär funktion eftersom den kan skrivas $f(x) = kx + m$ med $k = 10$ och $m = 40$.

b) $g(x) = 10x + 40x^2$ är **inte** en linjär funktion eftersom den innehåller en term $40x^2$ som är kvadratisk i x.

Linjära funktioner har fått sitt namn av att grafen till en linjär funktion är en *rät linje*. Detta samband ger oss också en tolkning av konstanterna k och m; k motsvarar linjens lutning och m motsvarar linjens skärning med y-axeln.

Exempel 4.2

Vi ritar graferna för funktionerna $f(x) = 10x + 40$ och $g(x) = 20x + 40$.



4.2 Linjära ekvationer

Linjära ekvationer

En ekvation $f(x) = g(x)$ i en variabel x kallas *linjär ekvation* om både $f(x)$ och $g(x)$ är linjära funktioner.

Grafiskt svarar en lösning till en linjär ekvation alltså mot en skärningspunkt mellan två räta linjer. En sak som skiljer linjära ekvationer från mer allmänna ekvationer är att vi *alltid* kan bestämma lösningarna till en linjär ekvation exakt genom att använda algebraiska manipulationer för att balansera ekvationen. Med andra ord kan vi alltid konstruera en *algebraisk lösning* till varje linjär ekvation.

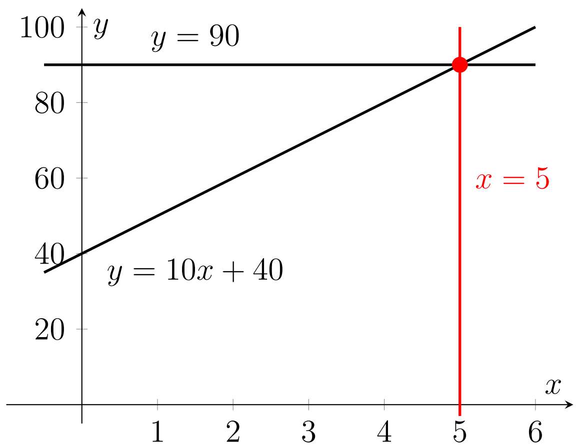
Exempel 4.3

Lös ekvationen $10x + 40 = 90$.

Lösn: Ekvationen är linjär eftersom den kan skrivas som $f(x) = g(x)$ med $f(x) = 10x + 40$ och $g(x) = 90$. Notera att $g(x)$ är en linjär funktion eftersom vi kan skriva $g(x) = kx + m$ med $k = 0$ och $m = 90$.
Vi löser först ekvationen algebraiskt på samma sätt som tidigare.

$$\begin{array}{rcl|l} 10x + 40 &=& 90 & -40 \\ 10x &=& 50 & \cdot \frac{1}{10} \\ x &=& 5 & \end{array}$$

Sedan betraktar vi graferna $y = f(x)$ och $y = g(x)$, och bestämmer lösningen till $f(x) = g(x)$ grafiskt genom att hitta skärningspunkten mellan graferna.



Svar: Lösningen till ekvationen är $x = 5$.

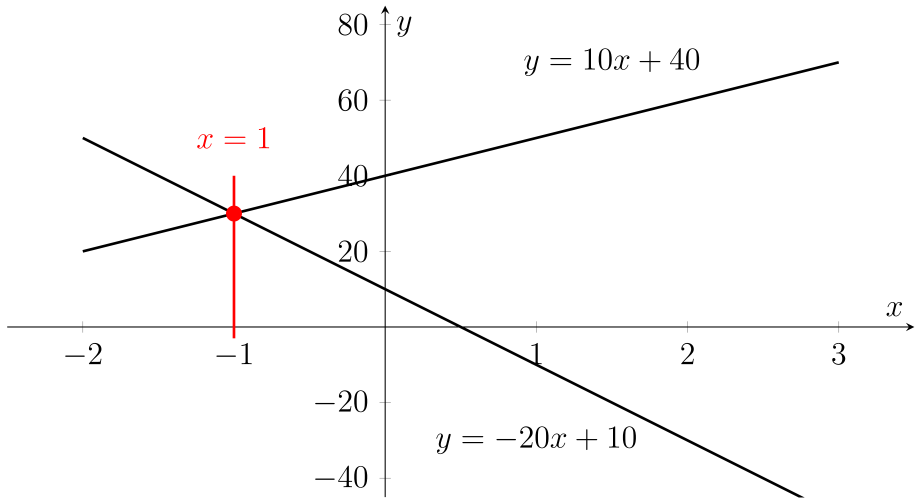
Exempel 4.4

Lös ekvationen $10x + 40 = -20x + 10$.

Lösn: Vi löser ekvationen algebraiskt,

$$\begin{array}{rcl|l} 10x + 40 & = & -20x + 10 & -40 + 20x \\ 30x & = & -30 & \cdot \frac{1}{30} \\ x & = & -1 & \end{array}$$

och illustrerar sedan lösningen grafiskt.



Svar: Lösningen till ekvationen är $x = -1$.

Lösningar till linjära ekvationer

Det är viktigt att komma ihåg att när vi säger att vi alltid kan *bestämma samtliga lösningar* till en linjär ekvation betyder det inte att det *alltid finns en lösning* till varje linjär ekvation. Det finns linjära ekvationer som saknar lösningar, d.v.s. där det inte finns något x som gör att VL = HL. Dessutom finns det linjära ekvationer där mer än ett x utgör en lösning. Det vi menar när vi säger att vi alltid kan bestämma alla lösningar till en linjär ekvation är att vi alltid algebraiskt kan bestämma samtliga lösningar x som gör att $f(x) = g(x)$ är uppfyllt.

Exempel 4.5

Vi betraktar den räta linjen $y = x + 1$. Genom att använda sambandet mellan lösningar till en ekvation och skärningspunkter mellan funktionsgrafer kan vi nu resonera kring lösningsmängder till linjära ekvationer.

a) Linjen $y = -2x+3$ skär $y = x+1$ precis en gång. Motsvarande linjära ekvation

$$\begin{array}{rcl|l} -2x+3 & = & x+1 & -1+2x \\ 2 & = & 3x & \cdot\frac{1}{3} \\ x & = & \frac{2}{3} & \end{array}$$

har *exakt en lösning* $x = \frac{2}{3}$.

b) Linjen $y = x+2$ skär inte $y = x+1$ någonstans. Motsvarande linjära ekvation

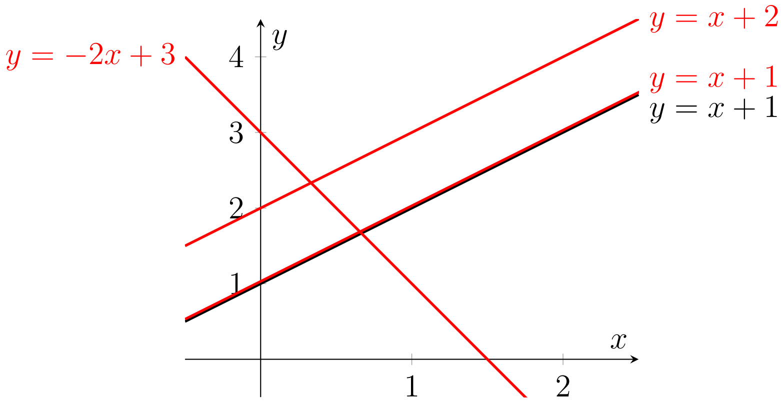
$$\begin{array}{rcl|l} x+2 & = & x+1 & -x \\ 2 & = & 1 & \end{array}$$

har *inga lösningar*, eftersom VL $\neq$ HL för alla x.

c) Linjen $y = x+1$ skär $y = x+1$ i varje punkt (linjerna är identiska). Motsvarande linjära ekvation

$$\begin{array}{rcl|l} x+1 & = & x+1 & -x \\ 1 & = & 1 & \end{array}$$

har *oändligt många lösningar* eftersom VL = HL för varje x.



Med samma typ av resonemang som i exemplet ovan kan vi konstatera att två räta linjer aldrig kan skära varandra precis två gånger, tre gånger, fyra gånger, o.s.v. Vi drar därför slutsatsen att i allmänhet gäller att en *linjär ekvation* endast kan ha

a) *en* lösning,

b) *ingen* lösning,

c) *oändligt många* lösningar.

Linjära ekvationer på allmän form

Avslutningsvis noterar vi att eftersom både vänster- och högerledet i en linjär ekvation är linjära funktioner kan vi alltid skriva ekvationen $f(x) = g(x)$ på följande form genom att flytta över alla termer i vänsterledet.

Linjär ekvation (allmän form)

En linjär ekvation är en ekvation på formen

$$ax + b = 0\,, \quad a \neq 0\,,$$

eller, ekvivalent,

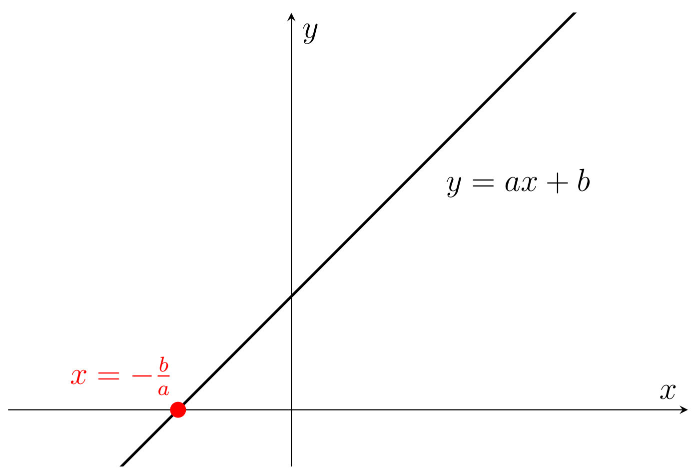
$$x + q = 0\,,$$

där a, b, q är konstanter.

Konstanterna i de två ekvivalenta formerna är relaterade genom sambandet $b = aq$. Lösningen till en linjär ekvation på allmän form ges av

$$x = -\frac{b}{a}\,.$$

Notera att genom villkoret $a \neq 0$, som krävs för att vi skall kunna dividera med a, begränsar oss till linjära ekvationer som har en entydig lösning. Lösningen kan dock fortfarande tolkas som en skärningspunkt, närmare bestämt skärningspunkten mellan linjen $y = ax + b$ och x-axeln ($y = 0$).



4.3 Linjära olikheter

Linjära olikheter är, på motsvarande sätt som linjära ekvationer, olikheter som relaterar linjära funktioner.

Linjära olikheter

En olikhet i en variabel x, t.ex. $f(x) < g(x)$, kallas en *linjär olikhet* om både $f(x)$ och $g(x)$ är linjära funktioner.

På samma sätt som vi alltid kan lösa linjära ekvationer fullständigt med algebraiska metoder, kan vi alltid lösa linjära olikheter.

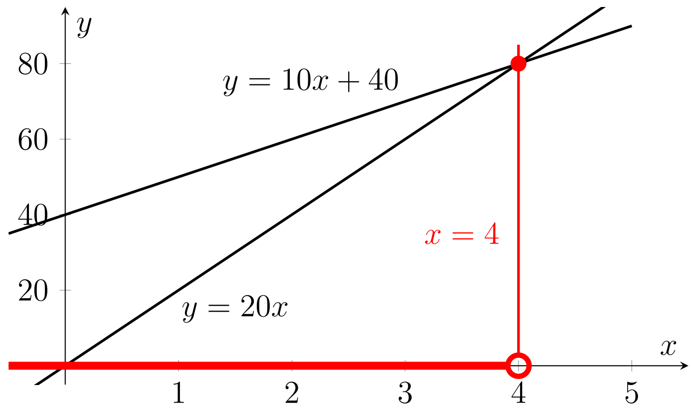
Exempel 4.6

Lös olikheten $20x < 10x + 40$.

Lösn: Olikheten är linjär, vi löser den först algebraiskt.

$$\begin{array}{rcl|l} 20x & < & 10x + 40 & -10x \\ 10x & < & 40 & \cdot\frac{1}{10} \\ x & < & 4 & \end{array}$$

Vi konstruerar sedan en grafisk lösning genom att rita graferna $y = 20x$ och $y = 10x + 40$.



För alla $x < 4$ ligger $y = 20x$ *nedanför* $y = 10x + 40$, d.v.s. lösnignarna till $20x < 10x + 40$ är $x < 4$.

Svar: Olikheten $20x < 10x + 40$ har lösningarna $x < 4$.

4.4 Räta linjens ekvation

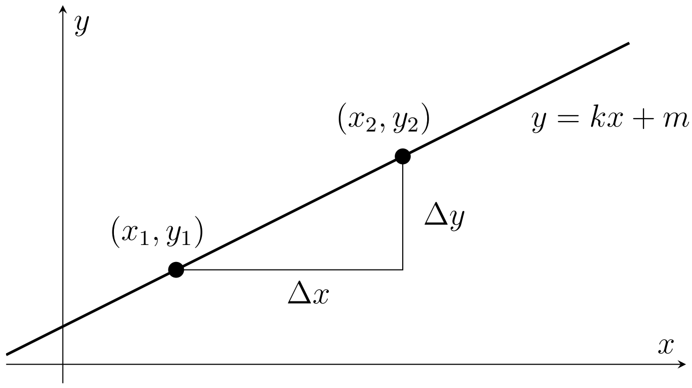
Vi återvänder nu till grafen $y = f(x)$ till en linjär funktion $f(x) = kx+m$. Som vi tidigare sett är grafen en *rät linje*. Vi skall nu studera dessa linjer närmare genom att betrakta $y = kx + m$ som en ekvation i två variabler x och y. Eftersom vi har två variabler lever linjen i xy-planet, där vi betecknar en punkt genom att ange dess koordinater på formen (x, y).

Räta linjens ekvation (k-form)

Ekvationen $y = kx + m$, där k och m är konstanter kallas för räta linjens ekvation på k-form. Linjen $y = kx + m$ har *lutningen* k och skär y-axeln i punkten $(0, m)$.

Vi kan förstå betydelserna av konstanterna k och m, som vi även nämnt tidigare i detta avsnitt. Vi studerar först fallet då $x = 0$. En punkt på linjen där $x = 0$ motsvarar en lösning till ekvationen $y = kx+m$ där $x = 0$, d.v.s. linjens skärningspunkt med y-axeln. Sätter vi in $x = 0$ förenklas ekvationen till $y = m$. Detta betyder att lösningen är $x = 0$, $y = m$, eller med andra ord att linjen går igenom punkten $(0, m)$.

För att förstå kopplingen mellan konstanten k och linjens lutning betraktar vi två punkter (x_1, y_1) och (x_2, y_2) på linjen med $x_2 \neq x_1$.



Lutningen för linjen beskriver hur stor förändringen Δy i y-led är i förhållande till förändringen Δx i x-led när vi rör oss längs linjen. När vi rör oss mellan punkterna (x_1, y_1) och (x_2, y_2) kan dessa förändringar uttryckas som

$$\Delta x = x_2 - x_1\,, \quad \Delta y = y_2 - y_1\,.$$

Lutningen ges därför av

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,,$$

där vi har definierat k så att linjen blir brantare för en större (positiv) lutning.

För att övertyga oss om att detta är samma k som förekommer i räta linjens ekvation noterar vi att eftersom punkterna (x_1, y_1) och (x_2, y_2) ligger på linjen $y = kx + m$ måste det gälla att

$$y_1 = kx_1 + m\,, \quad y_2 = kx_2 + m\,.$$

Om vi löser ut m i båda dessa ekvationer ser vi att

$$m = y_1 - kx_1\,, \quad m = y_2 - kx_2\,.$$

Eftersom m ä konstant måste uttrycken i högerleden vara lika. Ur denna likhet kan vi sedan lösa ut k (observera att $x_2 - x_1 \neq 0$),

$$\begin{array}{rcl|l}
y_1 - kx_1 & = & y_2 - kx_2 & +kx_2 - y_1 \\
kx_2 - kx_1 & = & y_2 - y_1 & \text{faktorisera} \\
k(x_2 - x_1) & = & y_2 - y_1 & \cdot\frac{1}{x_2 - x_1} \\
k & = & \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} &
\end{array}$$

vilket betyder att k i ekvationen $y = kx + m$ är just lutningen hos linjen.

Olika former av räta linjens ekvation

Vi har redan sett att det finns mer än ett sätt att ange en rät linje. Hittills har vi definierat en rät linje antingen genom att ange två punkter (x_1, y_1) och (x_2, y_2) på linjen, eller genom att ange lutningen k och skärningen m med y-axeln. Mer allmänt kan vi specificera en linje genom att ange dess lutning k och en godtycklig punkt (x_1, y_1) på linjen.

Räta linjens ekvation (enpunktsform)

Ekvationen $y - y_1 = k(x - x_1)$ kallas räta linjens ekvation på enpunktsform för den räta linje som har lutning k och går genom punkten (x_1, y_1).

Notera att vi k-formen och enpunktsformeln är ekvivalenta, vilket betyder att vi kan skriva om den ena formen till den andra. Om vi startar från enpunktsformen kan vi t.ex. gör följande omskrivning

$$\begin{aligned} y - y_1 &= k(x - x_1) && \Big| \text{ utveckla} \\ y - y_1 &= kx - kx_1 && \Big| +y_1 \\ y &= kx + (y_1 - kx_1) \end{aligned}$$

för att erhålla linjens ekvation på k-form med $m = y_1 - kx_1$.

Exempel 4.7

Bestäm ekvationen för linjen med lutning $k = \frac{1}{3}$ genom punkten $(2, 5)$ på k-form.

Lösn: Linjens ekvation på k-form är $y = kx + m$ med $k = \frac{1}{3}$. Punkten $(2, 5)$ skall ligga på linjen d.v.s. $(x, y) = (2, 5)$ skall lösa $y = \frac{1}{3}x + m$.

$$\begin{aligned} 5 &= \tfrac{1}{3} \cdot 2 + m && \Big| -\tfrac{2}{3} \\ 5 - \tfrac{2}{3} &= m && \Big| \text{ förläng } \quad 5 = \tfrac{15}{3} \\ \tfrac{15}{3} - \tfrac{2}{3} &= y_2 - y_1 && \Big| \text{ förenkla} \\ \tfrac{13}{3} &= m \end{aligned}$$

Svar: Linjens ekvation är $y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{13}{3}$.

Exempel 4.8

Bestäm ekvationen för linjen genom punkterna $(3, 1)$ och $(5, 7)$.

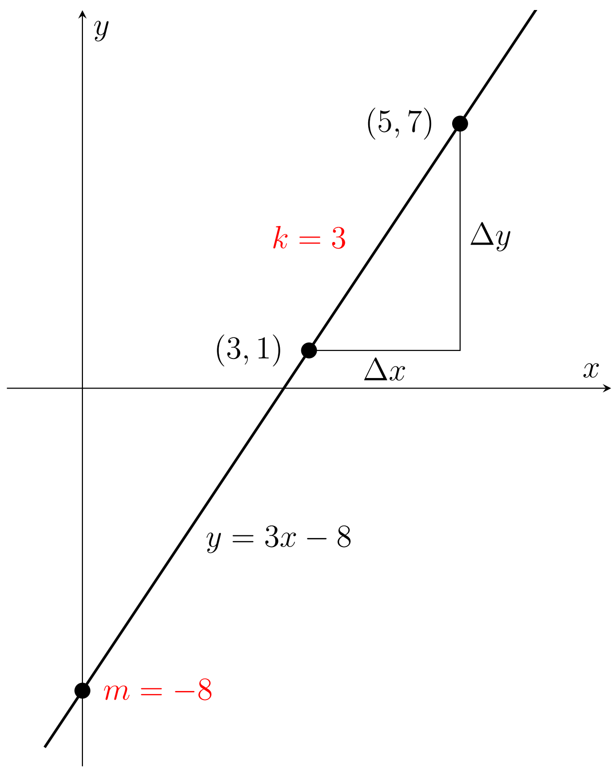
Lösn: Vi använder återigen räta linjens ekvation på k-form $y = kx + m$. Vi låter $(x_1, y_1) = (3, 1)$ och $(x_2, y_2) = (5, 7)$ och beräknar först lutningen

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7-1}{5-3} = \frac{6}{2} = 3\,.$$

Vi kan sedan använda $k = 3$ och en av punkterna på linjen, t.ex. $(3, 1)$ för att bestämma m genom insättning i $y = kx + m$

$$\begin{array}{rcl|l} y & = & kx + m & k = 3\,,\ x = 3\,,\ y = 1 \\ 1 & = & 3 \cdot 3 + m & -9 \\ -8 & = & m & \end{array}$$

Alltså har vi $k = 3$, $m = -8$ och linjens ekvation är $y = 3x - 8$.



Svar: Linjens ekvation är $y = 3x - 8$.

Avlutningsvis noterar vi att en horisontell (vågrät) linje vars ekvation är $y = m$ motsvarar en rät linje $y = kx + m$ med lutning $k = 0$. På motsvarande sätt kan vi dock *inte* skriva en vertikal (lodrät) linje på k-form. Detta beror på att för en vertikal linje har alla punkter samma x-koordinat, d.v.s. dess ekvation är $x = c$, vilket betyder att $\Delta x = 0$ vilket ger division med noll i vår definition av lutningen $k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Alla räta linjer kan dock beskrivas med hjälp av räta linjens ekvation på *allmän form.* Som namnet antyder är k-formen, enpunktsformeln, horisontella och vertikala linjer alla speciallfall av den allmänna formen.

Räta linjens ekvation (allmän form)

Varje rät linje kan besrivas med ekvationen $ax + by + c = 0$, där a, b och c är konstanter.

Exempel 4.9

Skriv linjerna $L_1 : y = 3x - 4$, $L_2 : y = 5$ och $L_3 : x = -3$ på allmän form.

Lösn: För att skriva linjerna på allmän form samlar vi helt enkelt alla termer i vänsterledet (och förenklar vid behov):

$$L_1 : -3x + y + 4 = 0\,, \quad L_2 : y - 5 = 0\,, \quad L_3 : x + 3 = 0$$

4.5 Övningsuppgifter

4.1 Bestäm skräningspunkterna mellan följande par av räta linjer.

a) $y = x + 1$ och $y = 5$

b) $y = x - 1$ och $y = -2x + 5$

c) $y = x$ och $y = -2x + 3$

4.2 Lös följande ekvationer algebraiskt och illustrerar lösningarna som skärningspunkter mellan linjer.

a) $x + 1 = -x - 1$

b) $x + 4 = 2$

b) $x + 1 = x + 3$

d) $2x = x$

4.3 Lös följande olikheter algebraiskt och illustrera lösningmängderna.

a) $x + 1 \geq 2x$

b) $2x - 1 < 5$

c) $x + 2 \leq 3x - 2$

d) $x - 1 \leq x + 1$

4.4 Avgör om följande punkter ligger på linjen $y = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{3}$.

a) $\left(1, \frac{1}{3}\right)$ b) $\left(-1, \frac{2}{3}\right)$ c) $(-1, -1)$ d) $(0, 0)$

4.5 Låt $f(x) = 2x - 3$ och $g(x) = x + 1$. Lös ekvationen $f(2x) = g(x)$ och illustrera lösningen som skärningspunkten mellan två linjer.

4.6 Bestäm ekvationen på k-form för följande räta linjer.

a) Linjen med lutning $k = -1$ genom punkten $(0, 0)$

b) Linjen med lutning $k = 2$ genom punkten $(1, 1)$

c) Linjen genom punkterna $(1, 0)$ och $(2, 2)$

d) Linjen genom punkterna $(1, -5)$ och $(-2, 1)$

4.7 Bestäm lutningen för följande räta linjer.

a) $y = 3x - 1$

b) $2x + 3y + 5 = 0$

c) $y = 1$

d) $x = 1$

4.8 Bestäm koordinaterna för den punkt där följande linjer skär y-axeln.

a) $y = 3x - 1$

b) $2x + 3y + 5 = 0$

c) $y = 1$

d) $x = 1$

5 Andragradsfunktioner och -ekvationer

I det sista avsnittet i det här kompendiet skall vi studera en annan vanlig typ av funktioner och ekvationer, nämligen sådana som innehåller ett kvadratiskt beroende på x. Till exempel beskriver sådana funktioner hur kroppar rör sig under inverkan av enbart konstant gravitation, så kallade kastparabler.

5.1 Andragradsfunktioner

Vi börjar med att definiera vad vi menar med en *andragradsfunktion* eller *kvadratisk funktion*.

Andragradsfunktion

En *andragradsfunktion* eller *kvadratisk funktion* är en funktion på formen

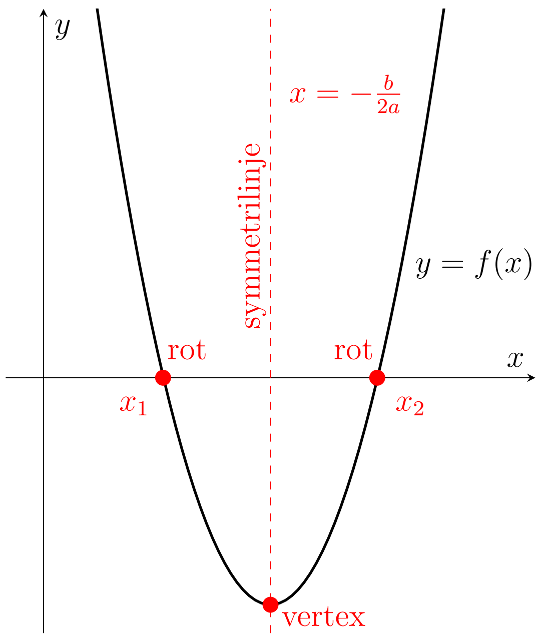
$$f(x) = ax^2 + bx + c\,, \quad a \neq 0\,.$$

Notera att vi här genom att kräva $a \neq 0$ inte betraktar linjära funktioner som ett specialfall av kvadratiska funktioner.

Grafen $y = f(x)$ för en andragradsfunktion kallas för en *parabel*. Om $a > 0$ har grafen en *minimipunkt* och om $a < 0$ har grafen en *maximipunkt*. Dessa punkter kallas också för grafens *vertex*. *Nollställen* till andragradsfunktionen $f(x)$ är *lösningar* till ekvationen $f(x) = 0$. I allmänhet har en andragradsfunktion två nollställen som vi kallar x_1 och x_2. Hur dessa nollställen kan bestämmas återkommer vi snart till. Avslutningsvis noterar vi att andragradsparabeln $y = f(x)$ är symmetrisk kring den vertikal linjen

$$x = -\frac{b}{2a}\,.$$

som går genom vertex-punkten.



5.2 Andragradsekvationer

Vi skall nu studera andragradsekvationer och deras lösningar, och börjar som vanligt med att definera vilken klass av ekvationer vi behandlar.

Andragradsekvation (allmän form)

En *andragradsekvation* eller *kvadratisk ekvation* är en ekvation på formen

$$ax^2 + bx + c = 0\,, \quad a \neq 0\,,$$

eller, ekvivalent,

$$x^2 + px + q = 0\,,$$

där a, b, c, p, q är konstanter.

Notera likheten med den allmäna formen av en linjär ekvation i föregående avsnitt. Även för andragradsekationer kan vi alltid bestämma samtliga lösningar med hjälp av algebraiska metoder*. Innan vi kan göra detta påminner vi om definitioner och egenskaper för kvadratrötter.

Kvadratrötter

Vi börjar med att definiera vad som menas med *kvadratroten* $\sqrt{a}$ av ett tal a. Vi påminner om att vi i det här kompendiet endast studerar reella tal.

Kvadratrot

Låt $a \geq 0$ vara ett reellt tal. Då är $\sqrt{a}$ det *icke-negativa* reella tal som uppfyller $(\sqrt{a})^2 = a$.

Vi betonar två viktiga egenskaper som följer direkt från definitionen, men som ofta är föremål för missförstånd:

i) Kvadratroten är endast definierad för icke-negativa tal ($a \geq 0$); $\sqrt{a}$ är *inte definierat* för $a < 0$.

ii) För $a \geq 0$ är kvadratoroten ett *entydigt* bestämt tal som uppfyller $\sqrt{a} \geq 0$.

Dessa egenskaper innebär att kvadratroten kan ses som en funktion $f(x) = \sqrt{x}$ med definitionsmängd $x \geq 0$. När vi begränsar oss till de reella talen är alltså t.ex. $\sqrt{-4}$ inte definierat.

Exempel 5.1

$$\sqrt{25} = 5\,, \quad \sqrt{0} = 0\,, \quad \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\,, \quad \sqrt{3} = 1.732\ldots \text{(irrationellt)}$$

Lösningar till andragradsekvationer

Vi skall nu se hur kvadratrötter låter oss konstruera lösningar till andragradsekvationer. Vi börjar med att göra följande observation som följer direkt från definitionen av kvadratroten samt det faktum att kvadraten av varje reellt tal är icke-negativ.

*Detta är något mycket ovanligt inom matematiken; det finns många till synes enkla typer av ekvationer där vi inte kan konstruera en lösningsformel som ger oss samtliga (eller ens några) lösnignar på sluten form.

Lösningar till $x^2 = a$

- Om $a \geq 0$ så har *ekvationen* $x^2 = a$ *lösningarna* $x = -\sqrt{a}$ och $x = \sqrt{a}$, eller $x = \pm\sqrt{a}$.
- Om $a < 0$ så har ekvationen $x^2 = a$ inga reella lösningar.

Med hjälp att detta resultat kan vi direkt lösa en stor klass av andragradsekvationer. Vi börjar med att illustrera principen med hjälp av några exempel.

Exempel 5.2

Lös ekvationen $x^2 = 9$.

Lösn: Vi använder sambandet att lösningarna till $x^2 = a$ ges av $x = \pm\sqrt{a}$

$$\begin{aligned} x^2 &= 9 && \mid \text{kvadratrot} \\ x &= \pm 3 \end{aligned}$$

Alltså är lösningarna till ekvationen $x = \pm 3$.

Svar: Lösningarna är $x = 3$, $x = -3$.

Exempel 5.3

Lös ekvationen $(x+1)^2 = 25$.

Lösn: Vi noterar först att $(x+1)^2 = 25$ verkligen är en andragradsekvation eftersom den kan skrivas som $x^2 + 2x - 24 = 0$ med hjälp av kvadreringsregeln. Sedan använder vi kvadratroten för att bestämma lösningarna

$$\begin{aligned} (x+1)^2 &= 25 && \mid \text{kvadratrot} \\ x+1 &= \pm 5 && \mid -1 \\ x &= -1 \pm 5 \end{aligned}$$

Alltså är lösningarna till ekvationen $x = -1 + 5 = 4$ och $x = -1 - 5 = -6$.

Svar: Lösningarna är $x = 4$, $x = -6$.

Exempel 5.4

Lös ekvationen $x^2 + x + 2 = 1 - x$.

Lösn: Vi skriver om ekvationen och använder kvadratroten för att bestämma lösningarna

$$\begin{aligned} x^2 + x + 2 &= 1 - x && \Big| \; +x - 1 \\ x^2 + 2x + 1 &= 0 && \Big| \; \text{kvadreringsregeln} \\ (x+1)^2 &= 0 && \Big| \; \text{kvadratrot} \\ x + 1 &= \pm 0 && \Big| \; -1 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Svar: Ekvationen har lösningen $x = -1$.

Exempel 5.5

Lös ekvationen $x^2 + 2x + 2 = 0$.

Lösn: Vi skriver om ekvationen och söker lösningarna

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 2 &= 0 && \Big| \; -1 \\ x^2 + 2x + 1 &= -1 && \Big| \; \text{kvadreringsregeln} \\ (x+1)^2 &= -1 \end{aligned}$$

Det finns inget reellt tal $x + 1$ vars kvadrat $(x + 1)^2$ är negativ, alltså finns det inga tal x som uppfyller ekvationen.

Svar: Ekvationen saknar reella lösningar.

Lösningsformel för andragradsekvationer

För en allmän andragradsekvation på formen $x^2 + px + q = 0$ finns en lösningsformel, d.v.s. ett uttryck för de två lösningarna till ekvationen i termer of konstanterna p och q.

pq-formeln

Lösningarna till ekvationen

$$x^2 + px + q = 0$$

ges av

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

för alla p, q sådana att kvadratroten $\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ är väldefinierad.

I pq-formeln antar vi att p och q är sådana att alla kvadratrötter som förekommer är väldefinierade. Vi skall återkomma till detta antagande i slutet av avsnittet. Vi börjar dock med att studera några konkreta exempel på hur pq-formeln används. Vi noterar också att pq-formeln låter oss bestämma ett uttryck för symmetrilinjen för andragradskurvan $y = x^2 + px + q$, som ligger mitt emellan lösningarna x_1 och x_2. Från den första termen ser vi att symmetrilinjens ekvation är

$$x = -\frac{p}{2},$$

eller för den mer allmänna kurvan $y = ax^2 + bx + c$

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

Exempel 5.6

Lös ekvationen $3x^2 - 24x + 21 = 0$.

Lösn: För att kunna avända pq-formeln måste vi först skriva ekvationen på formen $x^2 + px + q = 0$.

$$\begin{aligned} 3x^2 - 24x + 21 &= 0 \quad \Big| \cdot \tfrac{1}{3} \\ x^2 - 8x + 7 &= 0 \end{aligned}$$

Alltså har vi $x^2 + px + q = 0$ med $p = -8$, $q = 7$. Från pq-formeln följer då att lösningarna till ekvationen ges av

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = 4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 7} = 4 \pm \sqrt{9} = 4 \pm 3$$

Alltså är lösningarna $x = 4 + 3 = 7$, $x = 4 - 3 = 1$.

Svar: Lösningarna är $x = 7$, $x = 1$.

Exempel 5.7

Lös ekvationen $x^2 + 18x + 81 = 0$.

Lösn: Vi har $x^2 + px + q = 0$ med $p = 18$, $q = 81$. Från pq-formeln följer då att lösningarna till ekvationen ges av

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = -9 \pm \sqrt{9^2 - 81} = -9 \pm \sqrt{0} = -9 \pm 0$$

Alltså ger pq-formeln i det här fallet bara en lösning $x = -9 \pm 0 = -9$.

Svar: Lösningen är $x = -9$.

Vi återvänder till villkoret i pq-formeln att rotuttrycket skall vara väldefinierat. Från definitionen av kvadratroten följer att

$$\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

är väldefinierat om

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geq 0.$$

Om olikheten inte är uppfylld finns det inga reella lösningar till ekvationen $x^2+px+q=0$. Om vi har likhet,

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$$

ser vi från pq-formeln att de två lösningarna är identiska

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = -\frac{p}{2}\,.$$

Exempel 5.8

Lös ekvationen $x^2 - 4x + 16 = 0$.

Lösn: Vi har $x^2 + px + q = 0$ med $p = -4$, $q = 16$. Från pq-formeln följer då att lösningarna till ekvationen ges av

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = -2 \pm \sqrt{2^2 - 16} = -9 \pm \sqrt{-12}$$

Eftersom $\sqrt{-12}$ inte är definierat har ekvationen inga reella lösningar.

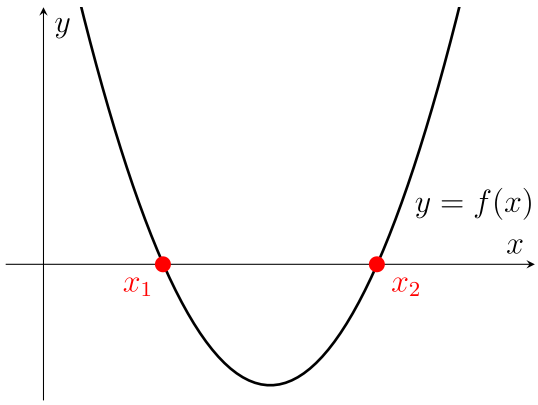
Svar: Ekvationen saknar reella lösningar.

För att förstå sambandet mellan olikheten och antalet reella lösningar till ekvationen kan vi använda det faktum att lösningarna till $f(x) = x^2 + px + q = 0$ motsvarar nollställen till funktionen $f(x)$, samt det faktum att en ökning av konstanten q mostvarar en förskjutning av grafen till $f(x)$ uppåt.

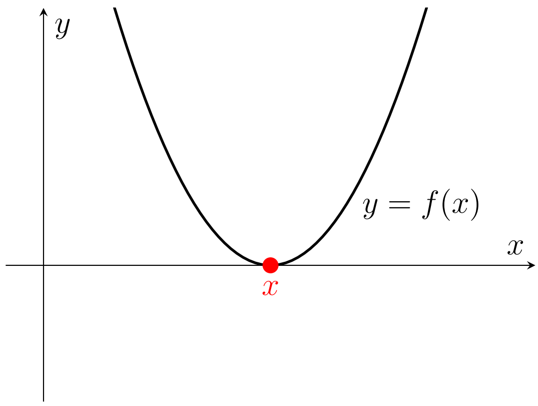
Lösningar till andragradsekvationer

Ekvationen $f(x) = x^2 + px + q = 0$ har följande reella lösningar:

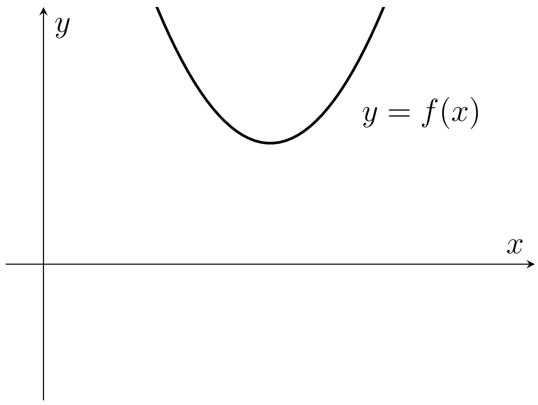
Om $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$ finns *två* lösningar $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$.



Om $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$ finns *en* lösning (två identiska lösningar) $x = -\frac{p}{2}$.



Om $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$ finns *ingen* lösning.



5.3 Övningsuppgifter

5.1 Beräkna följande kvadratrötter om de är definierade.

a) $\sqrt{9}$ b) $\sqrt{81}$ b) $\sqrt{-4}$ b) $\sqrt{(-2)^2}$

5.2 Bestäm samtliga lösningar till följande ekvationer.

a) $x^2 = 4$

b) $(x-1)^2 = 1$

c) $x^2 + 2 = 0$

d) $x^2 = 0$

5.3 Lös andragradsekvationern $f(x) = 0$ och skissa parabeln $y = f(x)$ för

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = x^2 + 1$

c) $f(x) = x^2 - 1$

5.4 Lös andragradsekvationern $f(x) = 0$ och skissa parabeln $y = f(x)$ för

a) $f(x) = -x^2 + 2x - 1$

b) $f(x) = 2x^2 - 8$

c) $f(x) = 3x^2 - 6x - 15$

5.5 Lös följande andragradsekvationer.

a) $x^2 - 3x - 4 = 0$

b) $x^2 + 4x - 8 = 0$

c) $x^2 - 4x + 2 = 0$

d) $x^2 + 4x + 8 = 0$

5.6 Lös följande andragradsekvationer.

a) $2x^2 - 4x + 2 = 0$

b) $-2x^2 - 3x - 4 = 0$

c) $3x^2 + 4x - 1 = 0$

d) $5x^2 - 2x - 2 = 0$

5.7 Bestäm för vilka värden på c som ekvationen $x^2 + 3x + c$ har

a) en lösning,

b) två olika lösningar,

c) inga lösningar.

A Svar och lösningar

A.1 Grundläggande aritmetik

1.1 a) 1 b) -4 c) 7 d) -13

1.2 a) 36 b) 1 c) 1000 d) 14

1.3 a) 9 b) 12 c) -1 d) 0

1.4 a) $\frac{2}{7}$ b) $\frac{16}{3}$ c) 32 d) $\frac{315}{143}$

1.5 a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{11}{6}$ c) 0 d) $\frac{13}{30}$

1.6 a) $\frac{2}{15}$ b) $\frac{8}{5}$ c) $-\frac{7}{2}$ d) $-\frac{22}{25}$

1.7 a) $\frac{25}{6}$ b) $-\frac{7}{5}$ c) $\frac{45}{7}$ d) $\frac{1}{10}$

A.2 Algebraiska uttryck

2.1 a) -18 b) 14 c) 31 d) 1

2.2 a) $x^2 - 3x + 1$ b) $-2a^2 + 4a + 2$ c) $2x^2 + 2xy - 4y^2$ d) 0

2.3 a) $-2x^2 - x + 3$ b) $2x^3 + 3x^2 + x$ c) $-2x^2 + 12x - 3$ d) $5x^3 + 6x^2y + xy^2$

2.4 a) $4x(x + 4)$ b) $(x + a)(b + 2)$ c) $y(y + 1)(x + 1)$ d) $-x(x + 1)$

2.5 Vi använder sambandet $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$. Med $c = a$ och $d = -b$ erhåller vi konjugatregeln

$$(a + b)(a - b) = a^2 + a(-b) + ba + b(-b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2\,.$$

Med $c = a$ och $d = b$ erhålls den första kvadreringsregeln

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2\,.$$

Den andra kvadreringsregeln visas på motsvarande sätt

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 + a(-b) + (-b)a + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2\,.$$

2.6 a) $4x^2 - y^2$ b) $x^4 + 8x^2 + 16$ c) $x^4 - 1$ d) 0

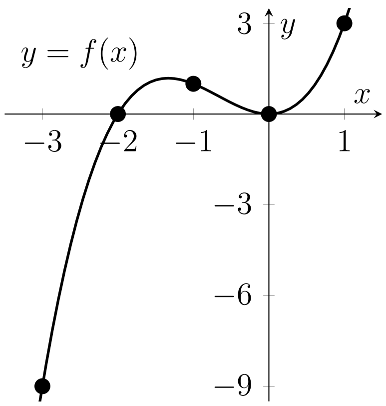
2.7 a) $3(x + 3)(x - 3)$ b) $a(a + 1)^2$ c) $x^2(x + 2y)(x - 2y)$ d) $(y^3 - 1)^2$

2.8 a) $2yz$ b) $x(x - 1)$

A.3 Funktioner, ekvationer och olikheter

3.1 a) $f(-3) = -9,\ f(-2) = 0,\ f(-1) = 1,\ f(0) = 0,\ f(1) = 3,\ f(2) = 16$

b) Vi markerar punkterna på grafen motsvarande dessa funktionsvärden ochs skissar grafen $y = f(x)$.



3.2 a) 26 b) $6h$ c) $6h$

3.3 a) Ja b) Nej c) Ja

3.4 a) $x = \frac{3}{2}$ b) $x = -2$ c) $x = 3$ d) $x = 0$

3.5 a) $x = -\frac{1}{3}$ b) lösningar saknas c) $x = -\frac{1}{2}$ d) $x = 0$

3.6 a) $x \geq -1$ b) $x < 3$ c) $x \geq \frac{4}{3}$ d) lösningar saknas

3.7 a) $x = -2$, $x = 0$, $x = 2$ b) $x = -2$, $x = 0$ c) $-2 < x < 0$

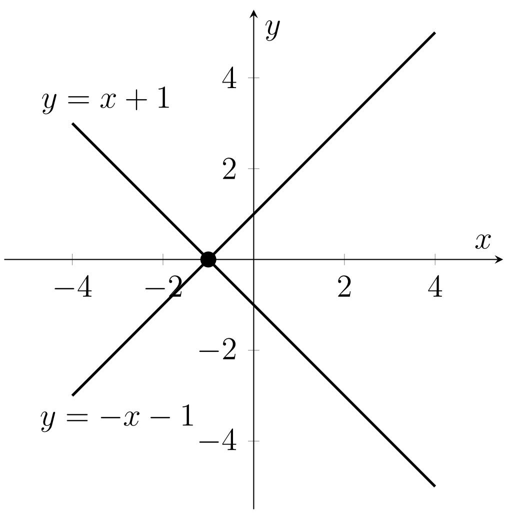
3.8 $x = \frac{5}{2}$

A.4 Linjära funktioner och räta linjens ekvation

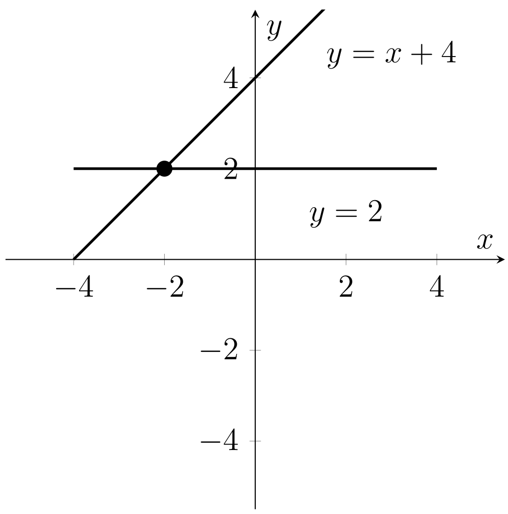
4.1 a) $(x, y) = (4, 5)$ b) $(x, y) = (2, 1)$ c) $(x, y) = (1, 1)$.

4.2

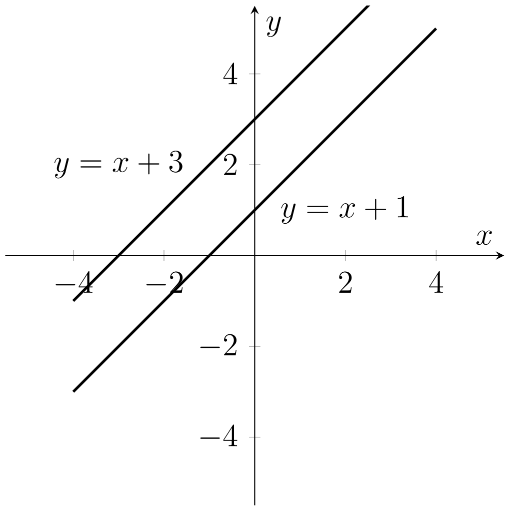
a) $x = -1$



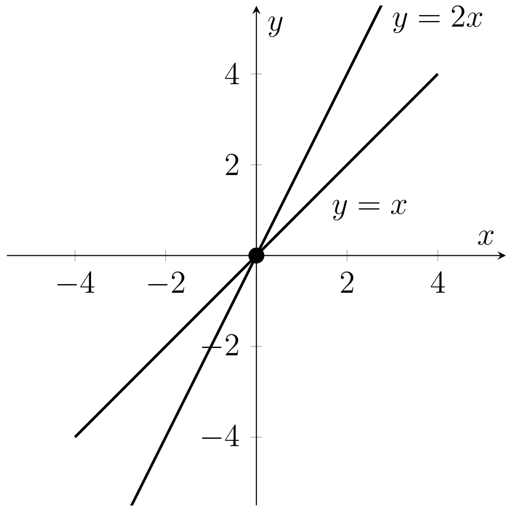
b) $x = -2$



c) lösningar saknas

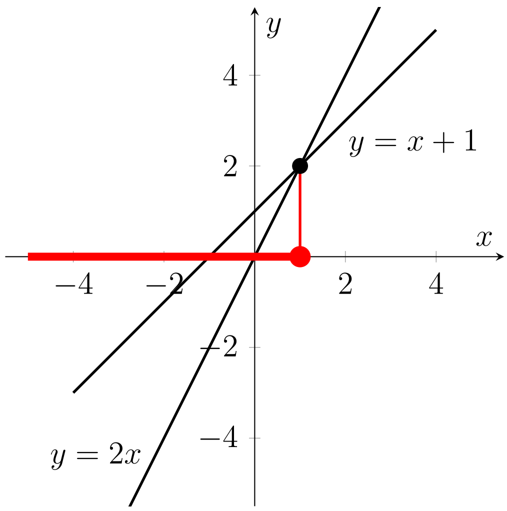


d) $x = -1$, $x = 1$

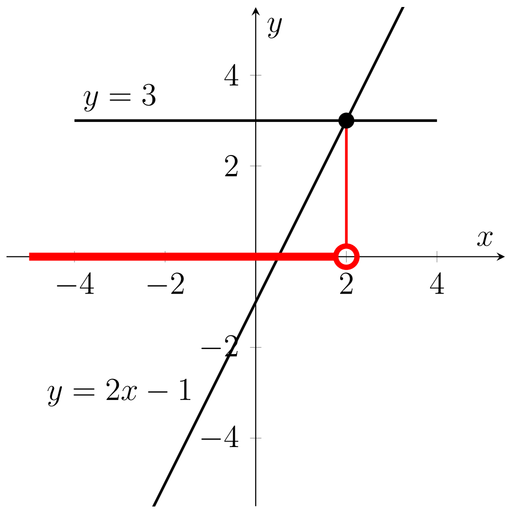


4.3

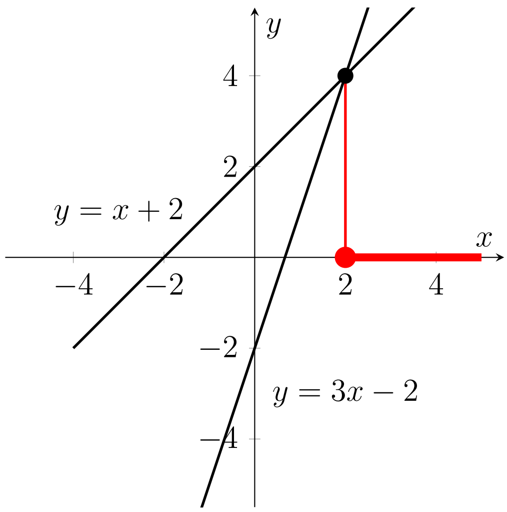
a) $x \leq 1$



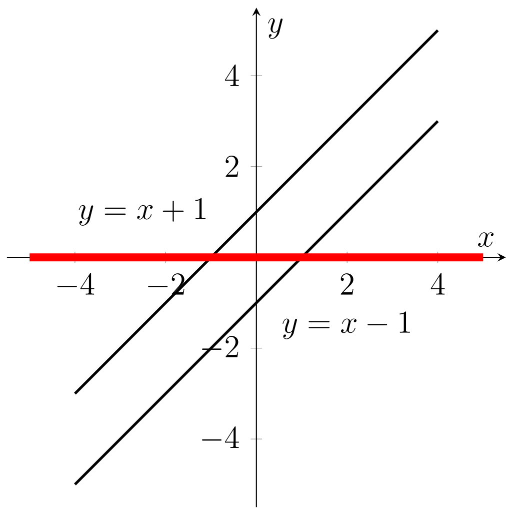
b) $x < 2$



c) $x \geq 2$

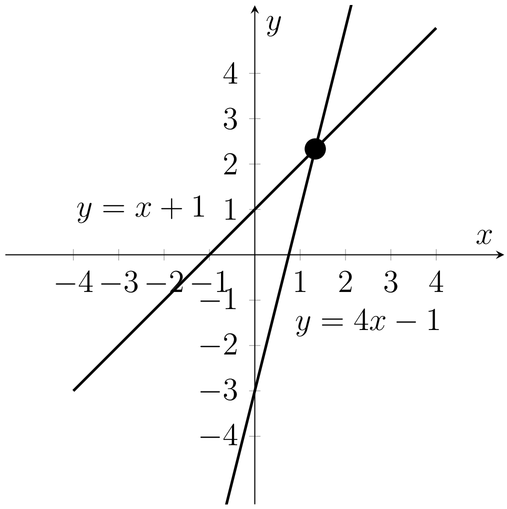


d) alla reella x



4.4 a) Ja b) Nej c) Ja d) Nej

4.5 Vi har $f(2x) = 2 \cdot (2x) - 3 = 4x - 3$ och $g(x) = x + 1$. Ekvationen $f(2x) = g(x)$ har lösningen $x = \frac{4}{3}$. Vi illustrerar linjerna $y = f(2x) = 4x - 3$ och $y = g(x) = x + 1$ samt deras skärningspunkt $\left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right)$.



4.6 a) $y = -x$ b) $y = 2x - 1$ c) $y = 2x + 1$ d) $y = -2x - 3$

4.7 a) $k = -1$ b) $k = -\frac{2}{3}$ c) $k = 0$ d) lutningen k ej definierad

4.8 a) $(0, -1)$ b) $\left(0, -\frac{5}{3}\right)$ c) $(0, 1)$ d) linjen skär inte y-axeln

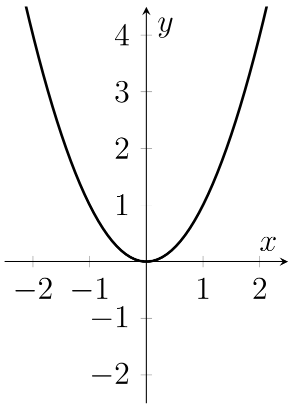
A.5 Andragradsfunktioner och -ekvationer

5.1 a) 3 b) 9 b) ej definierat b) 2

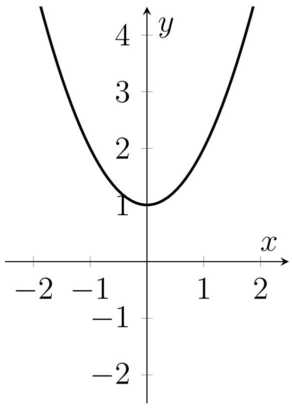
5.2 a) $x = \pm 2$ b) $x = 0$, $x = 2$ c) lösningar saknas d) $x = 0$

5.3

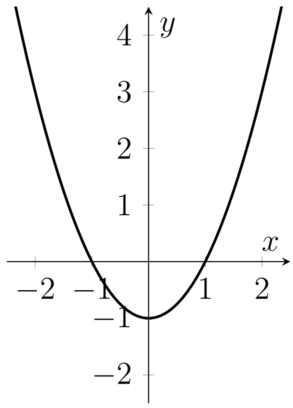
a) $x = 0$



b) lösningar saknas

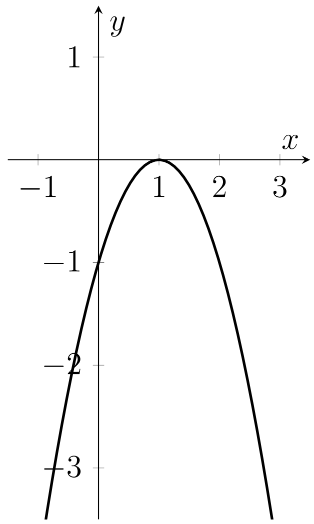


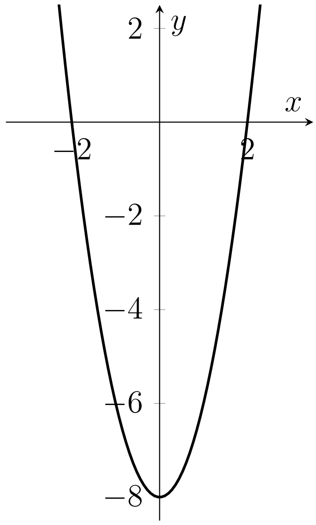
c) $x = -1$, $x = 1$

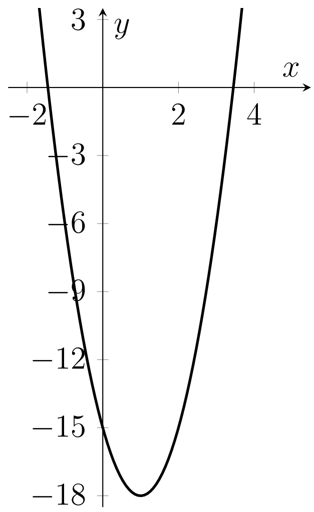


5.4

a) $x = 1$ b) $x = -2$, $x = 2$ c) $x = 1 - \sqrt{6}$, $x = 1 + \sqrt{6}$







5.5 a) $x = -1$, $x = 4$ b) $x = -2 \pm \sqrt{12}$ c) $x = 2 \pm \sqrt{2}$ d) lösningar saknas

5.6 a) $x = -1$ b) lösningar saknas c) $x = \frac{-2\pm\sqrt{7}}{3}$ d) $x = \frac{1\pm\sqrt{11}}{5}$

5.7 a) $c = \frac{9}{4}$ b) $c < \frac{9}{4}$ c) $c > \frac{9}{4}$